題號：212　　　　國立臺灣大學97學年度碩士班招生考試試題
科目：工程數學(A)

Problem 1　(25%)

It is known that $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -3\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}$. If $\mathbf{B}=\mathbf{A}^6-2\,\mathbf{A}^5-3\,\mathbf{A}^4+9\,\mathbf{A}^3-4\,\mathbf{A}^2-6\,\mathbf{A}+8\,\mathbf{I}$, find B and $e^{\mathbf{B}}$, both solutions should be expressed in terms of a 3 x 3 matrix.

【提示】:

(1)

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -3\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix};$$

經由矩陣的特徵值計算可得：

特徵值={2, -1, 1}

特徵向量= $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

轉換矩陣 P= $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(2) 根據題意，矩陣函數 ：

$$B=A^6-2A^5-3A^4+9A^3-4A^2-6A+8I$$

$$=P\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & f(\lambda_i) & \\ & & \ddots\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & \lambda_i^{\,6}-2\lambda_i^{\,5}-3\lambda_i^{\,4}+9\lambda_i^{\,3}-4\lambda_i^{\,2}-6\lambda_i+8 & \\ & & \ddots\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 3 & 4 & -3\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(3) 再接下去，計算 B 矩陣的

特徵值={4, 3, 1}

特徵向量= $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

轉換矩陣 P= $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

(4) 可計算出矩陣函數

$$e^{B}=P\begin{bmatrix}\backslash & & \\ & e^{\lambda_i} & \\ & & \backslash\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}e^{4} & -e^{3}+e^{4} & e^{3}-e^{4}\\ -e+e^{4} & e^{4} & e-e^{4}\\ -e+e^{4} & -e^{3}+e^{4} & e+e^{3}-e^{4}\end{pmatrix}。$$

Problem 2 (25%)

The Fourier series representation of $g(x)=|x|$, for $-L\le x\le L$, has been found to be

$$g(x)=\frac{L}{2}-\frac{4L}{\pi^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[\frac{(2n-1)\pi x}{L}]}{(2n-1)^{2}}.$$

Given $f(x)=\begin{cases}1 & for\ \ x<0\\ -1 & for\ \ 0<x\end{cases}$ and $h(x)=\int_{-2\pi}^{x} f(t)\,dt$.

Find the Fourier series representation of $h(x)=\int_{-2\pi}^{x} f(t)\,dt$, for $-2\pi\le x\le 2\pi$.

【提示】:

(1) 由題目: $g\left(x\right)=\frac{L}{2}-\frac{4L}{\pi^{2}}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos\left[\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right]}{(2n-1)^{2}}$

兩邊微分，可得: $g'(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<L\\ -1, & -L\le x<0\end{cases}=f(x)$

$$g'\left(x\right)=f\left(x\right)=\left(\frac{L}{2}-\frac{4L}{\pi^{2}}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos\left[\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right]}{(2n-1)^{2}}\right)'$$

$$f\left(x\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right]}{(2n-1)}$$

(2) 代入$L=2\pi$，則 $f\left(x\right)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin\left[\frac{\left(2n-1\right)x}{2}\right]}{\left(2n-1\right)}$

(3) 兩邊積分，可得：

$$\int_{-2\pi}^{x} f\left(x\right)dx=h\left(x\right)=\int_{-2\pi}^{x}\left(\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin\left[\frac{\left(2n-1\right)x}{2}\right]}{\left(2n-1\right)}\right)dx+c$$

$$h\left(x\right)=-\frac{8}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos\left[\frac{\left(2n-1\right)x}{2}\right]}{\left(2n-1\right)^{2}}+c$$

(4) 代入 $x=-\pi$ ，可得出 $h\left(-\pi\right)=\int_{-2\pi}^{-\pi} f\left(x\right)dx=\int_{-2\pi}^{-\pi}\left(-1\right)dx=\pi-2\pi=-\pi$

$h\left(-\pi\right)=-\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\cos\left(-\frac{\left(2n-1\right)\pi}{2}\right)+c=0+c=-\pi$ ， $c=-\pi$

故 $h\left(x\right)=-\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos\left[\frac{\left(2n-1\right)x}{2}\right]}{\left(2n-1\right)^{2}}-\pi$ ， $-2\pi\le x\le 2\pi$ 。

Problem 3 (25%)

(a) Solve the following ordinary differential equation

$\dfrac{d^2\phi(x)}{dx^2}=1+x \quad -1\le x\le 1$, which is subjected to the boundary conditions:

$\phi(x=-1)=0$ and $\phi(x=1)=0$.

And identify the homogeneous, particular solutions and resonant modes.

(b) Express the solution of $\phi(x)$ from *Part(a)* in terms of the Chebyshev polynomials $T_n(x)$.

Hint: $T_0(x)=1$; $T_1(x)=x$; $T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0$; $(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$;

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=0,\ m\ne n$; $\|T_0(x)\|^2=\pi$; $\|T_n(x)\|^2=\pi/2$; $n=1,2,3,\ldots$.

【提示】: (a) 要解 物理問題 $\phi''=1+x,\ B.C.\begin{cases}\phi\left(-1\right)=0\\ \phi\left(1\right)=0\end{cases}$之前，

要先解特徵值的數學問題 $y''+\lambda y=0,\ B.C.\begin{cases} y(-1)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$ 。

參考上課筆記，可解出 特徵值與特徵函數分別為：

$$\begin{cases} \lambda_n = n\pi, \phi_n(x) = \sin(n\pi x) \\ \lambda_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2}, \phi_n(x) = \cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}\right), n =, 2, 3, ... \end{cases}$$

綜合可知：$\left\{\sin(n\pi x), \cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right\}, n =, 2, 3, ...$ 在 $x \in (-1,1)$ 形成一個正交完整集。

使用正交函數展開法 $(1+x) = \sum_1^{\infty} d_n \phi_n(x),$

係數：$d_n = \dfrac{(1+x, \phi_n(x))}{(\phi_n(x), \phi_n(x))} = \dfrac{\int_{-1}^{1}(1+x)\phi_n(x)dx}{\int_{-1}^{1}\phi_n^{\ 2}(x)dx}$ 。

接著我們又 令 $y = \sum_1^{\infty} c_n \phi_n(x)$ ，並將之代回方程式，$\phi'' = 1+x$

比較方程式兩邊的係數之後，就可解出 c_n ，也就是解出了特別解 $y(x)$ 。

(b) 依據題意，柴比雪夫級數，也是個正交完整集，其對應內積的權函數為：$\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 。所以可將解答以此組特徵函數展開，得：

$$\phi(x) = \sum_1^{\infty} c_n T_n(x),$$

$$c_n = \frac{(\phi(x), T_n(x))}{(T_n(x), T_n(x))} = \frac{\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx}{\int_{-1}^{1}\frac{T_n^{\ 2}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx}\ ,$$

由題目的提示(hint)可知，係數計算：

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Problem 4 (25%)

(a) Find the solution of the following partial differential equation (PDE):

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\quad r_1=3\le r\le r_2=5$$

Where $u(r,\theta)$ is periodic in θ with period 2π and subject to the Dirichlet boundary conditions: $u(r_1=3,\theta)=F(\theta)=2+\cos\theta$; $u(r_2=5,\theta)=G(\theta)=1$

(b) Explain the applications of this PDE.

Hint: You may assume $u(r,\theta)=R(r)\,\Theta(\theta)$.

【提示】:

(a)

(1) 滿足此 PDE 和週期形邊界條件$u(r,\theta)=u(r,\theta+2\pi)$的通解為：

$$u(r,\theta)=\alpha_0+\beta_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta\right)r^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)r^{-n}$$

(2) 代入邊界條件，$u(3,\theta)=2+\cos\theta$，

得$u(3,\theta)=\left(\alpha_0+\beta_0\ln 3\right)+\left(3\alpha_1+\dfrac{a_1}{3}\right)\cos\theta=2+\cos\theta$，

其他係數均為零。

(3) 代入另外一組邊界條件，$u(5,\theta)=1$，

得$u(5,\theta)=\left(\alpha_0+\beta_0\ln 5\right)+\left(5\alpha_1+\dfrac{a_1}{5}\right)\cos\theta=1$，

(4) 綜合(2),(3)可得聯立方程組：$\begin{cases}\alpha_0+\beta_0\ln 3=2\\ \alpha_0+\beta_0\ln 5=1\\ 3\alpha_1+\dfrac{a_1}{3}=1\\ 5\alpha_1+\dfrac{a_1}{5}=0\end{cases}$，可以解出四個常數。

$$\alpha_0=\frac{2\ln 5-\ln 3}{\ln 5-\ln 3},\beta_0=\frac{-1}{\ln 5-\ln 3}，\alpha_1=\frac{-3}{16},a_1=\frac{75}{16}。$$

(b)此問題可應用在電容器的電位問題，或 steady state 的熱傳問題上。

題號：213　　　　　國立臺灣大學97學年度碩士班招生考試試題
科目：工程數學(K)

1. (10%) Let two vectors $\mathbf{P}=(3,1)$ and $\mathbf{Q}=(1,3)$. Find $\cos\theta$ in which θ is the angle between these two vectors.

【提示】：算夾角最好的工具，叫做向量內積。

$\theta=\cos^{-1}(3/5)$ 。

2. (15%) Find a unit vector **u** in the direction of $\mathbf{v}=(3,4)$. Find all the possibilities of a unit vector U perpendicular to **u**.

【提示】：與向量$(3,4)$垂直的單位向量有：

$\left(\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right)$或$-\left(\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right)$ 。

3. (20%) Find the determinants of rotation $\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ and reflection

$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1-2\cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta\\ -2\cos\theta\sin\theta & 1-2\sin^2\theta\end{bmatrix}$.

【提示】：旋轉矩陣的行列式值=1，鏡射矩陣的行列式值=−1。

4. (20%) Consider a matrix $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & a\\ c & b\end{bmatrix}$. (a) What is LU factorization of the matrix? (b) Under what condition is this matrix singular?

【提示】：

(a) LU 分解：$\begin{bmatrix}1 & 0\\ l_{21} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ 0 & u_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & c\end{bmatrix}$

L 的第 1 列乘上 U 的第 1 行得：$u_{11}=1$，
L 的第 1 列乘上 U 的第 2 行得：$u_{12}=a$ ，
L 的第 2 列乘上 U 的第 1 行得：$l_{21}u_{11}=b\Rightarrow l_{21}=b$ ，
L 的第 2 列乘上 U 的第 2 行得：$l_{21}u_{12}+u_{22}=c\Rightarrow u_{22}=c-l_{21}u_{12}=c-ab$ 。

(b)行列式值等於零，此矩陣為奇異矩陣。

5. **(20%)** Consider an ordinary differential equation $mx'' + kx = 0$ in which the prime indicates the derivative with respect to t. (a) Find the general form for the solution $x(t)$. (b) Find the solution for $m = \frac{9}{4}$, $k = 1$ with the initial conditions of $x(0) = -4$ and $x'(0) = 0$.

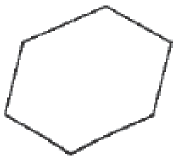
【提示】:

(a) 通解: $x[t] = c_1 \cos[\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}] + c_2 \sin[\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}]$ 。

(b) 本題使用拉普拉斯變換：

答案為： $x(t) = -4\cos[\frac{2t}{3}]$ 。

6. **(15%)** Given a convex polygon, derive and write down the procedures for obtaining the area of the polygon (a simple convex polygon with six edges is shown below. Nevertheless, your procedures should be general enough for solving any convex polygon with edges greater than three).



【提示】:

(1) 將此凸 n 邊形分解成 n-2 三角形。

(2) 每個三角形的面積都可以寫成三角形任兩邊向量的外積的一半（面積要取正值），也就是：

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \text{或者等於} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix},$$

同理第二個三角形面積，也可以表示成： $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$,

其他各個三角形，可依此類推。

(3) 將各塊三角形的面積，全部加在一起，就會等於所要計算的凸多邊形面積，再將此式合併，可得：

$$\text{多邊形面積} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} + \cdots .. + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_{n-1} & x_n & x_1 \\ y_1 & y_{n-1} & y_n & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n & x_1 \\ y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n & y_1 \end{vmatrix} \text{。}$$

1. Consider the second-order homogeneous linear differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

a) Find the two linearly independent solutions f_1 and f_2 of this equation which are such that

$f_1(0)=1$ and $f_1'(0)=0$

and

$f_2(0)=0$ and $f_2'(0)=1$ (5%)

b) Express the solution

$3e^x+2e^{2x}$

as a linear combination of the two linearly independent solutions f_1 and f_2 defined in (a)

(5%)

【提示】：(a)

(1) 先解 $f_1''-3f_1'+2f_1=0, f_1(0)=1, f_1'(0)=0$，答案： $f_1=2e^x-e^{2x}$ 。

(2) 再解 $f_2''-3f_2'+2f_2=0, f_2(0)=0, f_2'(0)=1$，答案： $f_2=-e^x+e^{2x}$ 。

(b) 由題意： $3e^x+2e^{2x}=c_1f_1+c_2f_2=c_1(2e^x-e^{2x})+c_2(-e^x+e^{2x})$ ，

可解出 $c_1=5, c_2=7$ 。

2. Consider the differential equation

$$(4x+3y^2)dx+2xydy=0$$

a) Show that this equation is not exact.(5%)

b) Find an integrating factor of the form x^n, where n is a positive integer.(5%)

c) Multiply the given equation through by the integrating factor found in (b) and solve the resulting exact equation. (5%)

【提示】:

(a) 顯然不正合。

(b) 積分因子為 x^n ，所以 $\dfrac{\partial\left(x^n\left(4x+3y^2\right)\right)}{\partial y}=\dfrac{\partial\left(2x^{1+n}y\right)}{\partial x}$ ，

解得 $n=2$ 。

(c) 此方程式的解答為： $x^4+x^3y^2=c$ 。

3. The function f has at (1,-1) a directional derivative equal to $\sqrt{2}$ in the direction toward (3,1), and $\sqrt{10}$ in the direction toward (0,2).

a) Find the value of $\partial f/\partial x$ and $\partial f/\partial y$ at (1,-1).(5%)

b) Determine the derivative of f at (1,-1) in the direction toward (2,3). (5%)

【提示】:

(a) 設 $\nabla f\big|_{(1,-1)}=(a,b)$ ，又方向導數為： $\dfrac{df}{ds}=\nabla f\bullet\hat{u}$ ，

由題目可知： $\begin{cases}(a,b)\cdot\dfrac{(3,1)}{\sqrt{10}}=\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{3a+b}{\sqrt{10}}=\sqrt{2}\\(a,b)\cdot\dfrac{(0,2)}{2}=\sqrt{10}\Rightarrow\dfrac{2b}{2}=\sqrt{10}\end{cases}$ ，

可以解出： $a=\dfrac{\sqrt{20}-\sqrt{10}}{3},b=\sqrt{10}$ 。

(b) $\dfrac{df}{ds}=\nabla f\bullet\hat{u}=(a,b)\bullet\dfrac{(2,3)}{\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(2a+3b)=\dfrac{2\sqrt{20}+7\sqrt{10}}{3\sqrt{13}}$ 。

4. Find a unit tangent vector to the curve of intersection of the plane $y-z+2=0$ and the cylinder $x^2+y^2=4$ at the point (0,2,4) (10%)

【提示】:

計算兩個面在交點上，兩個法向量的內積，即為此兩面交線的切線向量。

平面 $y-z+2=0$ 的法向量為： $(0,1,-1)$ ，

在點 $(0,2,4)$ 上，圓柱面的法向量為： $(0,4,0)$ ，

計算以上兩向量的外積，得切線向量為： $\pm(4,0,0)$ ，

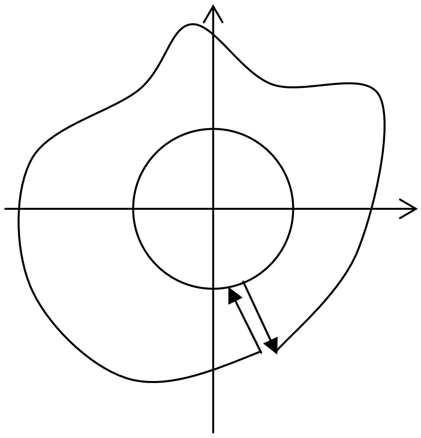
故單位切線向量為： $\pm(1,0,0)$ 。

5. Evaluate the line integral

$$\int_c \frac{-ydx+(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$$

where c is any piecewise smooth simple closed curve containing the point (1,0) in its interior. (15%)

【提示】: 此題為 Green’s 定理，積分路徑中含有奇異點的問題，可參考上課講義第四章。



$\oint_C \frac{-ydx+(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$ ，C 為包含原點的封閉曲線，

路徑 C 包含了函數的奇異點（原點），

因此並不滿足 Green’s theorem 的條件。

我們切割曲線之後，改考慮由四段路徑，所形成的線積分：

$$[\int_{C-\varepsilon}+\int_{C_{in}}+\int_{C_{out}}-\int_{C^*-\varepsilon}]=\iint_R(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy$$

由於此軌道，已經將原點排除在外，且形成封閉曲線

套用 Green’s 定理，我們可以知道，此積分值為零。

再利用極限值 $\lim_{\varepsilon\to 0}[\int_{C-\varepsilon}+\int_{C_{in}}+\int_{C_{out}}+\int_{C^*-\varepsilon}]=\iint_R(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy=0$

所以 $\oint_C fdx+gdy=\oint_{C^*} fdx+gdy$

而 C^* 為圓心在原點，半徑為 r 的圓，即 $\begin{cases} x-1=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

代入線積分 $\oint_C \frac{-ydx+(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$

$$= \int_0^{2\pi} [\frac{-r\sin\theta(r)(-\sin\theta)}{r^2} + \frac{r\cos\theta \times r\cos\theta}{r^2}] d\theta$$
$$= 2\pi$$

6. Evaluate

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)} dx$$

by complex variable methods. (15%)

【提示】:

(1) 傅氏積分形的積分，首先將積分表示成：$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x\left(1+x^2\right)} dx = \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x\left(1+x^2\right)} dx\right]$

(2) 利用複變積分留數定理的技巧：$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x\left(1+x^2\right)} dx = 2\pi i\left[R(i) + \frac{R(0)}{2}\right]$ 。

$R(i) = -\frac{1}{2e}, R(0) = 1$，所以$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x\left(1+x^2\right)} dx = 2\pi i\left[R(i) + \frac{R(0)}{2}\right] = \frac{i(-1+e)\pi}{e}$ 。

(3) 故 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x\left(1+x^2\right)} dx = \mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x\left(1+x^2\right)} dx\right] = \frac{(-1+e)\pi}{e}$ 。

7. Show that any function f(t) can be expressed as the sum of two component functions, one of which is even and the other odd. (10%)

【提示】:

任何函數一定可以表示成一個偶函數和奇函數的合：

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \text{ 。}$$

8. An important property of the Laplace transform is the convolution theorem. State this theorem and prove it. (15%)

【提示】:

L[f*g]=F(s)G(s)

證明: $\int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \cdot dt$

把積分順序調換

$$=\int_0^\infty f(\tau)\int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau)dt\cdot d\tau$$

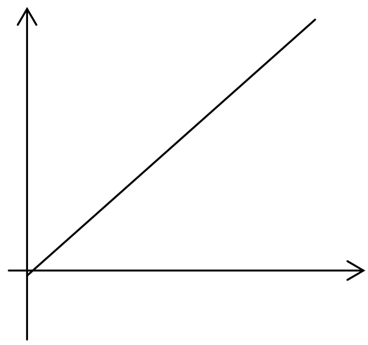
內標的下限取平移，減去τ

$$=\int_0^\infty f(\tau)\big((\tau)d(t+\tau)\big)d\tau$$

$$=\int_0^\infty f(\tau)\left(\int_0^\infty e^{-s(t+\tau)} g(t)dt\right)d\tau$$

$$=\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

=F(s)G(s)



國立中興大學97學年度碩士班招生考試試題

科　目：工程數學　　　　　　　　　　　　所　別：土木工程學系丙組

本科目試題共 1 頁

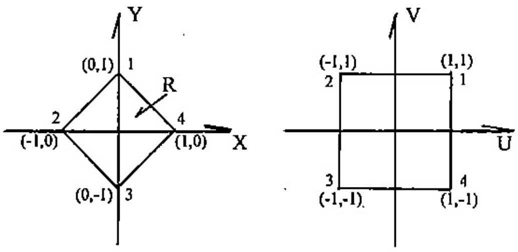
1.(25%)試求下列二階常微分方程式之解 y(x)。

$$y''(x)+2y'(x)+2y(x)=5\sin x$$

2.(25%)平面座標 xy 有一位置向量(3,5)，試求相對 xy 座標逆時針旋轉 30 度之 x'y'座標，則原座標 xy 位置向量(3,5)在 x'y'座標系統之位置向量為何？

3.試利用座標區域轉換求下列積分值。

$$f=\iint_R (x^2+y)\,dxdy$$ 積分區域 R 如下左圖



(1).(10%)說明 XY 與 UV 座標系統轉換關係為

$$X+Y=U$$
$$X-Y=V$$

(2).(15%)利用轉換至 UV 座標系統求前述積分值 f。

4. (1).(10%)函數 f 之梯度(gradient)∇f之意義為何？有一平面函數 $y=x^2$，則其上一點(x_i, y_i)之梯度為何？

(2).(15%)試求平面上一點(1,0)與前述函數 $y=x^2$ 之最近距離為何？

1. 【提示】:

二階常係數微分方程式的通解=齊性解+特別解。

特別解部分，可由未定係數法得出。

方程式：$2y[x]+2y'[x]+y''[x]=5Sin[x]$

通解 $y=C_1e^{-x}\sin[x]+C_2e^{-x}\cos[x]-2\cos[x]+\sin[x]$。

2. 【提示】：座標旋轉：$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，取反轉換

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}。$$

代入$\theta=30^\circ$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$。

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}。$$

3. 【提示】：

本題為重積分，取變數變換。

(1) 由變換區域的兩個圖形可以發現，根據邊界對邊界的原理，

此變數變換為$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=(u+v)/2 \\ y=(u-v)/2 \end{cases}$,

且 Jacobian 行列式$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}$。

(2) 根據$\int_A\int f(x,y)dxdy=\int_B\int f(x(u,v),y(u,v))\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$

原式的積分：$\iint\limits_R (x^2+y)\,dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2+\dfrac{u-v}{2}\right)\dfrac{1}{2}dudv=\dfrac{1}{3}$。

4. 【提示】：

(1)梯度有兩個意義：

(a) 梯度的物理意義為：純量場$\phi(x,y,z)$，增加最快的方向，梯度的絕對值就是

純量場$\phi(x,y,z)$在該點最大的變化率。

(b) 梯度的幾何意義為：曲面$\phi(x,y,z)$=c 的法向量。

平面函數$y=x^2$在$\left(x_i,y_i\right)$的梯度也就是法向量為$\pm\left(2x_i,-1\right)$。

(2) 假設點(1,0)與$y=x^2$最短距離的點為$\left(x_i,y_i\right)$，

點(1,0)與$y=x^2$最短距離方向就是：$y=x^2$在點$\left(x_i,y_i\right)$的梯度向量的方向，所以

$\left(x_i-1,y_i\right)//\left(2x_i,-1\right)$即 $\dfrac{x_i-1}{2x_i}=\dfrac{y_i-0}{-1}$，

且$y_i=x_i^{\ 2}$，

由以上兩個未知數，兩個方程式理論上可以解出$\left(x_i,y_i\right)$（事實上本題並不好解）。

又點(1,0)與$y=x^2$的最短距離=$\sqrt{\left(x_i-1\right)^2+y_i^{\ 2}}$。將解出的$\left(x_i,y_i\right)$代入

$\sqrt{\left(x_i-1\right)^2+y_i^{\ 2}}$即得最短距離。

國立中興大學97學年度碩士班招生考試試題

科　目：工程數學　　　　所　別：土木工程學系乙組

本科目試題共 / 頁

(10%)1. Solve the following differential equation

$$x^2 y''' + 3xy'' - 3y' = 0.$$

(10%)2. Find

(a) Laplace transform of $f(t) = \cos^2 3t - t^{-1/2}$.

(b) Inverse Laplace transform of $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2 - \pi^2}$.

(20%)3. Let a matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, to find

(a) A basis of eigenvectors and diagonalize A.

(b) The inverse of A (if it exist), and determinant of $(A^{-1})^3$.

(15%)4. (a) Describe the Green's theorem in the plane.

(b) Evaluate $I = \int_C (y^2 - 5y)dx + (2xy - 3x)dy$,

where C: the circle $x^2 + y^2 = 4$.

(10%)5. Interpret the physical meanings of Fourier series and Fourier transform, respectively.

(25%)6. Solve the following partial differential equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - G \quad \text{(G: acceleration of gravity)},$$

boundary conditions: u(0, t) = 0,　u(L, t) = 0.

initial conditions: $u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{L}, & \text{if } 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2}{L}(L - x), & \text{if } \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases}$

$u_t(x, 0) = 0$.

(10%)7. Evaluate

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2 + k^2)} dx \quad (m \geq 0,\ k > 0).$$

1. 【提示】：歌西方程式： $-3y' + 3xy'' + x^2 y''' = 0 \Rightarrow -3xy' + 3x^2 y'' + x^3 y''' = 0$
令 $y = x^m$ 代入，

輔助方程式為： $m(m-1)(m-2) + 3m(m-1) - 3m = 0$

解得 $m = -2, 2, 0$

所以齊性解為： $y = x^2 C_1 - \dfrac{C_2}{x^2} + C_3$ 。

2. 【提示】：

(a) $L[\cos^2 3t] = L[\dfrac{1+\cos(6t)}{2}] = \dfrac{1}{2s} + \dfrac{s/2}{s^2+36} = \dfrac{18+s^2}{s^3+36s}$ ，

$L\left[t^{-1/2}\right] = L\left[\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$ 。

(b) $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-\pi^2}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1}{s-\pi} + \dfrac{-1}{s+\pi}\right)\right] = \dfrac{1}{2\pi}\left(e^{\pi t} - e^{-\pi t}\right) = \dfrac{\sinh \pi t}{\pi}$ ，

$L^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{s^2-\pi^2}\right] = \dfrac{\sinh \pi(t-2)}{\pi} u(t-2)$ 。

3. 【提示】：

(a)三角矩陣，對角線的元素，就是特徵值。

特徵值={4, 3, 1}

特徵向量= $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

轉換矩陣 P= $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

對角矩陣 $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

(b) 反矩陣 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adj(A) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{5}{12} & \dfrac{3}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{4} & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

行列式 $\left|\left(A^{-1}\right)^3\right| = \dfrac{1}{|A^3|} = \dfrac{1}{12^3}$ 。

4. 【提示】:

(a) 設 R 為空間中一之封閉區域，C 為一分段平滑(piecewise smooth)之封閉曲線且 C 為 R 之邊界，函數 f(x,y),g(x,y)在 R 及 C 上均有定義且存在一階偏導數，則：

$$\oint_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy \text{ 。}$$

(b) 本題直接套用 Green's 定理：

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \left(\frac{\partial(2xy-3x)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2-5y)}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_R (2y-3-2y+5)\,dxdy = \iint_R (2)\,dxdy \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

5. 【提示】:

傅立業級數的物理意義：將一個具有週期性的訊號，分解成很多不同（離散）頻率的 sin 和 cos 的諧波的線性組合（疊加）。

傅立業變換的物理意義：將一個不具有週期性的訊號，分解成很多不同（連續）頻率的 e^{iwx} 的線性組合（積分）也。

6. 【提示】:

波動方程式: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - G$

（1）由方程式及邊界條件可知：

Let $u(x,t) = \sum_1^\infty C_n(t)\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}$ ，且 $G = \sum_1^\infty d_n \sin\dfrac{n\pi x}{\ell}$ ，

係數 $d_n = \dfrac{2}{\ell}\int_0^\ell G\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}dx = \dfrac{2G}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$

代回原波動方程式，$\sum_1^\infty [C_n''(t) + \dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2}C_n(t)]\sin\dfrac{n\pi x}{\ell} = \sum_1^\infty d_n \sin\dfrac{n\pi x}{\ell}$

用未定係數法，可以解得非齊性常係數微分方程式

$C_n''(t)+\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}C_n(t)=d_n$ 的解：

$$C_n(t)=\alpha_n\cos\frac{n\pi t}{\ell}+\beta_n\sin\frac{n\pi t}{\ell}+\frac{d_n\ell^2}{n^2\pi^2}$$ 。

(2) 再代回 $u(x,t)=\sum_1^\infty C_n(t)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ ，

可得 $$u(x,t)=\sum_1^\infty[\alpha_n\cos\frac{n\pi t}{\ell}+\beta_n\sin\frac{n\pi t}{\ell}+\frac{d_n\ell^2}{n^2\pi^2}]\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

(3) 代入初始條件 $u_t(x,0)=0$ ，得：$\beta_n=0$ 。

(4) 代入初始條件 $u_t(x,0)=f(x)$ ，得 $f(x)=\sum_1^\infty\left(\alpha_n+\frac{d_n\ell^2}{n^2\pi^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$ ，

計算係數：

$$\begin{aligned}\alpha_n&=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx-\frac{d_n\ell^2}{n^2\pi^2}\\&=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2}\frac{2x}{\ell}\cdot\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx+\frac{2}{\ell}\int_{\ell/2}^{\ell}\frac{(\ell-2)x}{\ell}\cdot\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx-\frac{d_n\ell^2}{n^2\pi^2}\end{aligned},$$

$$\alpha_n=\frac{8\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}-\frac{d_n\ell^2}{n^2\pi^2}$$ 。

7. 【提示】:

(1) 傅氏積分形的積分，首先將積分表示成：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{x(k^2+x^2)}dx=\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x(k^2+x^2)}dx\right]$$

(2) 利用複變積分留數定理的技巧：$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x(k^2+x^2)}dx=2\pi i\left[R(ki)+\frac{R(0)}{2}\right]$ 。

$$R(i)=-\frac{e^{-km}}{2k^2},R(0)=\frac{1}{k^2}$$ ，

所以$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x\left(k^2+x^2\right)}dx=2\pi i\left[R(i)+\frac{R(0)}{2}\right]=\frac{i\pi-i\,e^{-km}\pi}{k^2}$ 。

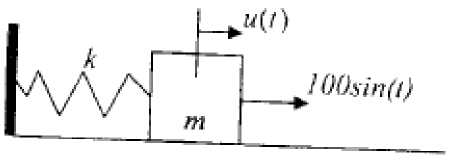
(3) 故 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{x\left(k^2+x^2\right)}dx=\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x\left(k^2+x^2\right)}dx\right]=\frac{\pi-e^{-km}\pi}{k^2}$ 。

國立中央大學97學年度碩士班考試入學試題卷

土木工程學系碩士班 結構組　　科目：工程數學

1. (20%)

(a)(5%)　請寫出下圖所示之光滑面上的質點-彈簧系統之水平方向運動之控制方程式?



(b)(10%)　請求解(a)題系統在自由振動(free vibration)下，具有初始位移$u(0)=\Delta$，初始速度$\dot{u}(0)=\alpha$時之解$u(t)=?$

(c) (5%)　請問(b)題中初始時刻($t=0$)之相位角δ是多少

【提示】:

(a) 運動方程式：$mu''+ku=100\sin t$ 。

(b) free viberation 的方程式為：$mu''+ku=0$ ，I.C.: $u(0)=\Delta, u'(0)=\alpha$

透過 拉氏轉換,配合初始條件,可以解出: $u(x)=\Delta Cos[\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}]+\frac{\alpha\sqrt{m}Sin[\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{m}}]}{\sqrt{k}}$ 。

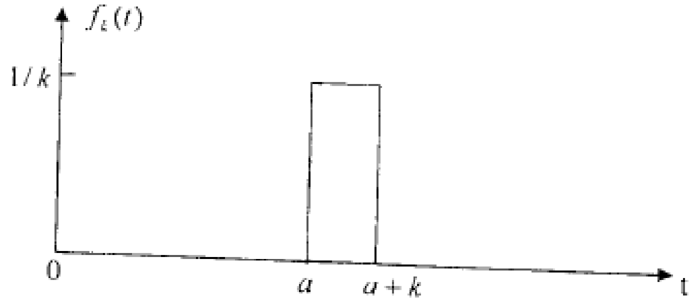
(c) 將上式中的解答，利用高中數學正弦和餘弦函數三角疊和的方法，將解答改寫成相位角：$u(t)=A\sin(\omega t+\phi)$ ，其中 A 就是振幅，ϕ 就是相位角。

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\Delta\sqrt{k}}{\alpha\sqrt{m}}\right)$$ 。

2. (15%)

(a) (5%) 請求下圖所示函數$f_k(t)$之 Laplace 轉換 (transform)，$L(f_k(t))=F_k(s)=?$

(b) (10%)　Limit　$F_k(s)=?$ as　$k\to 0$



【提示】：

(a) $f_k(t)=\dfrac{1}{k}\left(u(t-a)-u(t-a-k)\right)$ ， $F_k(s)=\dfrac{1}{ks}\left(e^{-as}-e^{-(a+k)s}\right)$

(b) $\lim\limits_{k\to 0}F_k(s)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{1}{ks}\left(e^{-as}-e^{-(a+k)s}\right)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{e^{-as}\cdot e^{-ks}\cdot s}{s}=e^{-as}$ 。（使用羅必達法則，求出此題的極限值）

3. (15%) 請求解以下之聯立常微分方程，$y_1(t)=?$，$y_2(t)=?$

$$\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1(t)\\ \ddot{y}_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{Bmatrix}$$

【提示】：本題應該採用矩陣法，解聯立常微分方程式。

(1) 取 $A=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$

特徵值＝{-6, -1}

特徵向量＝$\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

轉換矩陣 P＝$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

(2) 令 $y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=Px$ ，代入聯立方程式，利用矩陣對角化，可得

$x''=Dx$ 即 $\begin{bmatrix}x_1''\\ x_2''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ ，

從上式中，可以解出$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1e^{-6t}\\ c_2e^{-t}\end{bmatrix}$ ，

最後得解答： $y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=Px=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1e^{-6t}\\ c_2e^{-t}\end{bmatrix}$ 。

4) 一圓柱体外表由一圓柱面及兩平面所組成。圓柱面方程為 $x^2+y^2=16$，兩平面的方程分別為 $z=1$ 和 $z=5$。設 $d\underset{\sim}{A}$ 代表此圓柱体表面的面積微元，$d\underset{\sim}{A}$ 為一向量。另外，$\underset{\sim}{v} = y^2\underset{\sim}{i} + xz^3\underset{\sim}{j} + (z-1)^2\underset{\sim}{k}$ 代表一向量場，請計算出表面積分 (surface integral) $\iint_S \underset{\sim}{v}\cdot d\underset{\sim}{A}$。

此積分的下標 s 代表圓柱体的表面。S 由圓柱面和兩平面所組成 (25%)

【提示】：根據高斯散度定理 $\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dA = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dV$

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\vec{v}\,dv &= \iiint_V (2z-2)\,dv \\
&= \int_0^4\int_0^{2\pi}\int_1^5 (2z-2)\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^4\int_0^{2\pi} \left(z^2-2z\right)\Big|_{z=1}^{5}\,dr\,d\theta \\
&= 108\pi
\end{aligned}
$$

5) 設 $f(t) = \begin{cases} -\cos \pi t, & -1 < t < 0 \\ \cos \pi t, & 0 < t < 1 \end{cases}$

而且 $f(t)$ 為週期函數，其週期為 2.

請計算出此週期函數的 Fourier 級數的係數. (25%)

【提示】：T=2，且本題 $f(t)$ 為奇函數，

所以傅立業級數為： $f(t)=\sum_{1}^{\infty} b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}$ ，係數：

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\sin\frac{2n\pi t}{T}dt = 2\int_0^1 \cos\left(\pi t\right)\sin\left(n\pi t\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(\sin\left((n+1)\pi t + \sin\left((n-1)\pi t\right)\right)\right)dt \\
&= \frac{2n\left(1+\left(-1\right)^n\right)}{(-1+n^2)\pi}
\end{aligned}
$$

國立中央大學97學年度碩士班考試入學試題卷

土木工程學系碩士班 大地組　　科目：常微分方程式

1. (25%)

(a) (*10%*)　請問以下之微分方程是常微分方程還是偏微分程？綫性或非綫性？階數？

$x(y''y+(y')^2)+2y^3y'=0$

(b) (*5%*)　請寫出 2 階非齊性綫性常微分方程之廣義式表示式。

(c) (*10%*)　請問用 Laplace Transform 求解常微分方程之特色有那些？

【提示】：

(a) 二階非線性常微分方程式。

(b) $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)=R(x)$。

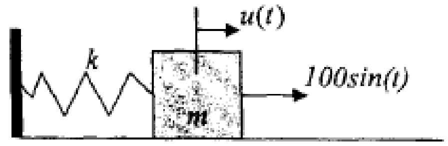
(c) 透過拉氏轉換，可以將微分轉換成乘以 s，原來的微分方程式，就變成簡單的代數方程式，解出代數方程式的解答之後（求解方程式的部分變的簡單了），透過反轉換，即求出原來微分方程式的解答。

2. (15%)　請求解 $y''+ay'+by=0$，其中 $a^2-4b=0$， $y(x)=?$

【提示】： $y(x)=c_1e^{-ax/2}+c_2xe^{-ax/2}$

3. (25%)

(a)(*5%*)　請寫出下圖所示之光滑面上的質點-彈簧系統之水平方向運動之控制方程式?



(b)(*10%*)　請求解(a)題系統在自由振動(free vibration)下，具有初始位移 $u(0)=\Delta$，初始速度 $\dot{u}(0)=\alpha$ 時之解 $u(t)=?$

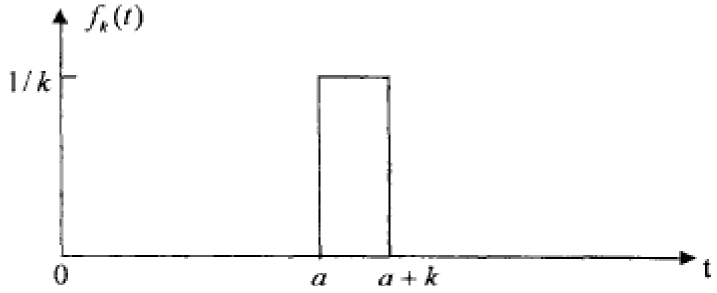
(c) (*10%*)　請問(b)題中初始時刻(*t=0*)之相位角 δ 是多少

【提示】：同結構組第一題。

4. (20%)

(a) (*10%*) 請求下圖所示函數 $f_k(t)$ 之 Laplace 轉換 (transform)，$L(f_k(t)) = F_k(s) = ?$

(b) (*10%*) Limit $F_k(s) = ?$ as $k \to 0$



【提示】：同結構組。

5. (15%) 請求解以下之聯立常微分方程，$y_1(t) = ?$，$y_2(t) = ?$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix}$$

【提示】：同結構組。

1. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2.5 & 7.5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$ with zero initial conditions, where a dot denotes the derivative with respect to time, t. What are the values of ω that make the solutions of $y_1(t)$ or $y_2(t)$ approach infinity as t reaches infinity? Find the solutions of $y_1(t)$ or $y_2(t)$ for such ω. (15%)

【提示】：將方程式改寫成$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\omega t/4 \\ 0 \end{bmatrix}$

矩陣：$\begin{bmatrix} 7/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$的特徵值為$\frac{1}{2}(5+\sqrt{5}), \frac{1}{2}(5-\sqrt{5})$，

所以$\omega = \omega_1, \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}, \sqrt{\frac{1}{2}(5-\sqrt{5})}$會發生共振的現象。

數字真的不好，所以以用拉氏轉換法求解的部分，從略。

2. Solve $4xy'' + 2y' - y = 2x + x^2$ in terms of power series. (20%)

【提示】：$x = 0$為正則奇異點，令$y(x) = \sum_0^\infty c_n x^{n+r}$代入方程式，得

$$\sum_0^\infty 4(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_0^\infty 2(n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_1^\infty c_{n-1} x^{n+r-1} = 2x + x^2$$

$$\sum_1^\infty \left[2(n+r)(2n+2r-1)c_n - c_{n-1}\right] x^{n+r-1} = 2x + x^2$$

當 $n = 0$，$2(r)(2r-1)c_0 = 0, \because c_0 \neq 0 \therefore r = \frac{1}{2}, 0$。

(1) 當$r = \frac{1}{2}$，得到循環公式：$2n(2n+1)c_n = c_{n-1}, n = 1,2,3,.....$

$c_1 = \frac{1}{6}c_0, c_2 = \frac{1}{120}c_0, ...$

得到第一個解答：$y(x) = c_0 x^{1/2}\left(1 + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{120} + ...\right)$

(2) 當$r = 0$，

$n=1 \Rightarrow 2c_1 = c_0, c_1 = \frac{c_0}{2}$ ，

$n=2 \Rightarrow 12c_2 = c_1 + 2, c_2 = \frac{c_0}{24} + \frac{1}{6}$ ，

$n=3 \Rightarrow 30c_3 = c_2 + 1, c_3 = \frac{c_2}{30} + \frac{1}{30} = \frac{c_0}{720} + \frac{7}{180}$ ，

$n=4$ 以後，可以得到循環公式： $2n(2n+1)c_n = c_{n-1}, n = 4,5,6,.....$

得到第二個解答： $y(x) = c_0\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + ...\right) + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^3}{180} + ...$

3. Please prove the following formulas or theorems:

(a) If $y_1(x)$ and $y_2(x)$ are two solutions of a homogeneous linear ODE (Ordinary Differential Equation), then a linear combination of these two solutions is still a solution of the homogeneous linear ODE. (7%)

(b) The Laplace transform of $\{f(t)/t\}$ is $\int_s^\infty F(\bar{s})d\bar{s}$, where $F(s)$ is the Laplace transform of $f(t)$. (8%)

【提示】:

(a) $L \equiv a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$

根據題意，已知 $L[y_1] = L[y_2] = 0$

$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = 0$

(b) 由
$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(x)dx &= \int_s^\infty [\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dt]dx \\ &= \int_s^\infty [\int_0^\infty f(t)e^{-xt}dx]dt\end{aligned}$$
（重積分，取交換積分順序）

$$= \int_0^\infty [\frac{f(t)}{t}e^{-xt}\Big|_s^\infty]dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-xt}dt$$

$$= \mathrm{L}[\frac{f(t)}{t}]$$

4. A matrix $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ is given.

(1) Find eigenvalues and their corresponding eigenvectors (10%)

(2) Find $\mathbf{X}^{-1}$ where $\mathbf{X}$ is the matrix of these eigenvectors. (10%)

(3) Find A^{10} through diagonalization of a matrix ($\mathbf{D}=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$). (10%)

【提示】:

(1) 特徵值 $\lambda = 1,3,3$

$\lambda = 1$，特徵向量：$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\lambda = 3$，特徵向量：$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

(2),(3) 本題的 $\lambda = 3$ 為二重根，可是只有一個特徵向量，本題明顯的無法對角化，和題目的提示不合（可能題目的打字有問題）。

當然也可以求：$\begin{array}{l} (A-3I)x^1 = 0 \\ (A-3I)x^2 = x^1 \Rightarrow (A-3I)^2 x^2 = 0 \end{array}$，

只是和題目的說明比較起來的話這樣做顯然很怪，硬著頭皮繼續往下做，順便複習一下喬登正則式：

由 $(A-3I)^2 x^2 = 0$ 解出廣義特徵向量 $x^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，

代回 $(A-3I)x^2 = x^1$，解得特徵向量 $x^1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$。

故 $X = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$。$X^{-1} = \dfrac{1}{|X|} adj(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$。

矩陣函數：$A^{10} = X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{10} & 10 \bullet 3^9 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix} X^{-1}$。

5. (a) Given a dynamic equation $u''(t)+\omega_0{}^2u(t)=p(t)$ for $t\geq 0$, with initial conditions $u(0)=u'(0)=0$ where ω_0 represents the natural frequency of the system. If the frequency response is defined as $\hat{u}(\omega)=H(\omega)\hat{p}(\omega)$, where $\hat{u}(\omega)$ is the Fourier transform of $u(t)$ and $\hat{p}(\omega)$ is the Fourier transform $p(t)$. Please find $H(\omega)$； (10%)

(b) Denoting $h(t)=F^{-1}\{H(\omega)\}$，$t\geq 0$ (Note:You don't need to solve $h(t)$!)， Please find $u(t)$ in terms of convolution integral. (10%)

Note1： $F(f*g)=\sqrt{2\pi}F(f)F(g)$

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Note2： $F(f)=\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$

$$f(t)=F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

【提示】:

(a) 將方程式$u''(t)+\omega_0{}^2u(t)=p(t)$，取傅立業變換，得

$$\left(-\omega^2+\omega_0{}^2\right)\hat{u}(\omega)=\hat{p}(\omega)\Rightarrow\hat{u}(\omega)=\frac{\hat{p}(\omega)}{\left(-\omega^2+\omega_0{}^2\right)}=H(\omega)\hat{p}(\omega)\text{，}$$

所以 $H(\omega)=\frac{1}{\left(-\omega^2+\omega_0{}^2\right)}$ 。

(b) $\hat{u}(\omega)=H(\omega)\hat{p}(\omega)$，取反轉換$u(t)=F^{-1}\left[\hat{u}(\omega)\right]=F^{-1}\left[H(\omega)\hat{p}(\omega)\right]$

根據提示：$\begin{array}{l}F[f*g]=\sqrt{2\pi}F[f]F[g]\\ f*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau\end{array}$,

所以$u(t)=F^{-1}\left[H(\omega)\hat{p}(\omega)\right]=F^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F[f*g]\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f*g$ 。

1. An undamped mass-spring system of forced oscillation can be described by $y''+4y=f(t)$ where $f(t)$ is a driving force. What is the nature frequency for this system? (5%) What is the particular solution for $f(t)=5\cos 2t$ using the method of undetermined coefficient? (13%)

【提示】:

(1) 令 $y=e^{\lambda t}$，代入 $y''+4y=0$，解得 $\lambda=\pm 2i$，
所以自然頻率(natural frequency) $\omega_n=2$。

(2) 假設特別解為： $y(t)=at\cos 2t+bt\sin 2t$，代入方程式 $y''+4y=5\cos 2t$，

透過比較係數可得： $a=0, b=5/4$。

答：特別解： $y(t)=\dfrac{5}{4}t\sin 2t$

2. A saw tooth wave can be expressed by a function as follows $f(t)=t,\quad 0<t<2\pi,\ f(t)=f(t+2\pi)$. Find the Fourier series of the function. (10%) If the function is taken as the driving force for the problem 1, please find the solution with initial conditions of $y(0)=0$, $y'(0)=0$. (12%)

[Note: Fourier series with coefficients,

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)dt,\ \ a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt,\ \ b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt\ ]$$

【提示】:

將 $f(t)$ 代入傅立業級數的係數計算公式： $a_0=\pi, a_n=0, b_n=\dfrac{-2}{n}$。

第二部分，將解答令成： $y(t)=\alpha_0+\sum_{1}^{\infty}\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt$，

並將假設的解答，代入方程式 $y''+4y=f(t)$，

得到： $4\alpha_0+\sum_1^{\infty}(-n^2+4)\left(\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt\right)=a_0+\sum_1^{\infty}b_n\sin nt$

比較之後，可得： $\alpha_0=\dfrac{\pi}{4},\alpha_n=0,\beta_n=\dfrac{b_n}{(-n^2+4)}=\dfrac{-2}{n(-n^2+4)}$ 。

3. The function $\phi(x,y)=x^2-y^2-y$ for a potential flow is a harmonic function. Please find its conjugate function $\psi(x,y)$. (10%)

【提示】：根據哥西里曼條件： $\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=-\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=2y+1\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y}=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=2x\end{cases}$ ，

兩式聯立，解得： $\psi\left(x,y\right)=2xy+x+c$ 。

4. Find the solution of the differential equation, ty''-$2ty'$-$2y$=0 with $y(0)$=0 , $y'(0)$=4, using Laplace transformation. (25%)

【提示】：

(1) 將方程式取拉氏轉換： $-\dfrac{d}{ds}(s^2Y(s))-\dfrac{d}{ds}\left(-2sY(s)\right)-2Y(s)=0$

整理得： $\left(s-2\right)\dfrac{dY\left(s\right)}{ds}-2Y\left(s\right)=0$ ，

(2) 解得方程式的解為： $Y(s)=\dfrac{c_1}{(-2+s)^2}$ ，

(3) 再取反轉換得： $y\left(t\right)=c_1te^{2t}$ 。

(4) 根據初始條件： $\lim\limits_{s\to\infty}y'\left(0\right)=4$ ，代入 $y\left(t\right)=c_1te^{2t}$ ，解得 $c_1=4$ 。

5. The temperature distribution in space is $T(x,y,z)=x^2y+yz$：

(a) Find the direction in which the temperature changes most rapidly with distance from point $P_1(1,2,3)$ and determine the maximum rate of change. (15%)

(b) Find the derivative of T in the direction of vector $5\mathbf{i}-4\mathbf{k}$ at point $p_2(3,2,1)$. (10%)

(a) 梯度方向就是溫度變化最快的方向。

$\nabla T=\left(2xy, x^2+z, y\right)$，代入 $P_1(1,2,3)$，

$\nabla T=(4,4,2)$。（梯度方向就是變化最快的方向）

最大變化率：$\max\dfrac{dT}{ds}=\left|\nabla T\right|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$。

(b) 方向導數：$\dfrac{dT}{ds}=\nabla T\cdot\hat{u}=(12,10,2)\cdot\dfrac{(5,0,4)}{\sqrt{41}}=\dfrac{68}{\sqrt{41}}$。