國立臺灣大學96學年度碩士班招生考試試題

台大土木

1. (20 %)
   (a) Find the Fourier series expansion, S_F, for $f(x) = -x$, $-1 < x < 1$.
   (b) Accordingly, find the Fourier series expansion, S_h, for $h(x) = 2 - x$, $2 < x < 6$.

(a)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x$$

明顯的，畫出圖以後，可以看出 f(x)為奇函數，所以 $a_n = a_0 = 0$，

$$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x dx = 2\int_0^1 -x\sin n\pi x dx = \frac{2}{n\pi}\cos n\pi = \frac{2}{n\pi}(-1)^n$$

(b) 畫出圖以後，可以看出 $h(x) = -2 - x, x \in (-2,2)$

$$h(x) = -2 - x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$a_n = 0, a_0 = -2$，punch

$$b_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} -x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^2 -x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{4}{n\pi}\cos n\pi = \frac{4}{n\pi}(-1)^n$$

2. (20 %)
For a vector function $\underline{F}(x, y, z) = F_1\underline{i} + F_2\underline{j} + F_3\underline{k}$, it is known that

$$curl\underline{F} = \nabla \times \underline{F} = (-4y^3z^5 - 4x^5y^2)\underline{i} - 4z^3\underline{j} + (20x^4y^2z - 3x^2y^2)\underline{k},$$
$$div\underline{F} = \nabla \bullet \underline{F} = 2xy^3 + 8x^5yz - 6y^4z^5.$$

Find the possible F_1, F_2 and F_3. (Hint: There is no unique solution. The solution based on observation is recommended.)

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$curlF = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(-4y^3z^6 - 4x^5y^2, -4z^3, 20x^4y^2z - 3x^2y^2\right)$$

$$divF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2xy^3 + 8x^5yz - 6y^4z^5$$

依據題意，本題可採用觀察法，所以

$$P = -z^4 + x^2y^3 + c_1$$
$$Q = 4x^5y^2z + c_2$$
$$R = -y^4z^6 + c_3$$

3. (25 %)
The definition of Laplace transform is

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$$

(a) Derive $L[\delta(t-c)] = e^{-sc}$, where $\delta(t)$ is the Dirac delta function.
(b) Show $L[\frac{df(t)}{dt}] = sL[f(t)] - f(0)$, provided that $f(\infty) = 0$.
(c) Show $L[f(t-a)H(t-a)] = e^{-as}L[f(t)]$, where $H(t)$ is the Heaviside step function.
(d) Solve

$$\frac{d^2 m(t)}{dt^2} = \delta(t-75), \quad 0 \le t < \infty,$$

with

$$m(0) = m(\infty) = 0.$$

(a) (b) (c) 推導證明，請參見上課筆記第 20 章。

(d) 假設另外一個初始條件爲 $y'(0) = C1$

將方程式轉換，並代入初始條件

$$y''[x] == \text{DiracDelta}[-75 + x]$$

$$-C1 + s^2 Y[s] == e^{-75 s}$$

$$Y[s] \to \frac{e^{-75 s}(1 + C1\, e^{75 s})}{s^2}$$

$$y[x] \to C1\, x + (-75 + x)\, \text{UnitStep}[-75 + x]$$

代入由題目的最後一個邊界條件 $y(\infty) = 0$ ，無法解出 C1，

若將邊界條件修改爲 $y(\infty) =$ 有限，可解出 C1=-75。

4. (10 %)
The solution of the second order ordinary differential equation $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ can be written as $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. If given $y_1(x) = e^x$, then derive the second solution as $y_2(x) = xe^x$.
Note: no derivation, no score!

已知一齊性解 $\phi_1(x)$ ， 求另一齊性解 $\phi_2(x) = \phi_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{\phi_1^{\,2}(x)}$ 。

公式的推導使用變換參數法，令 $\phi_2(x) = u(x)\phi_1(x)$，

請參見上課筆記第 14 章。

5. (25 %)
For the second order ordinary differential equation

$$(2x+3)^2 y''(x) - 2(2x+3)y'(x) + 4y(x) = 0,$$

(a) derive and obtain the transformation $t = f(x)$ which transforms this differential equation to a constant coefficients second order ordinary differential equation of variable t (Hint: chain rule).
(b) Write the transformed second order ordinary differential equation of variable t.
(c) Solve $y(x) =$?

(a) (b）自變數轉換 $s = 2x + 3$ ，應使用鍊鎖律，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dx} = 2\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4\frac{d^2y}{ds^2}$$

r 將上面兩式，代回原方程式，

原方程式可轉換爲 $s^2\frac{d^2y}{ds^2} - s\frac{dy}{ds} + y = 0$ ，1

再令 $s = e^t$ ，$t = \ln s$ ，

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{s}\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\frac{dy}{ds}\right) = \frac{-1}{s^2}\frac{dy}{ds} + \frac{11}{s^2}\frac{d^2y}{ds^2}$$

將上面兩式代入 $s^2\frac{d^2y}{ds^2} - s\frac{dy}{ds} + y = 0$

可將哥西方程式 $s^2\frac{d^2y}{ds^2} - s\frac{dy}{ds} + y = 0$

轉換爲常係數微分方程式：$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0$ 。

(c) 最後解出方程式的解，再用 $t = \ln(2x+3)$ 代入，

可得：$y = c_1e^t + c_2te^t = c_1(2x+3) + c_2\ln(2x+3)\bullet(2x+3)$ 。

國立成功大學九十六學年度碩士班招生考試試題

系所：土木工程學系甲組　　　　　　　　科目：工程數學

1. Determine the nature of the singularity (if any) at $z=0$ for the following $f(z)$. Can you expand these functions in powers of z convergent in a punctured disk $0<|z|<R$. (25%)

(a) $\sin(1/z)$

(b) $(\sin z)/z$

(c) $(\sin z)/z^2$

(d) $1/\sin(1/z)$

(e) $z\sin(1/z)$

(a) 本性奇点，不可以對 z=0 展開成在圓盤中收斂的冪級數。

(b) 可移除奇點，定義 $f(z)=\begin{cases} z/\sin z, & z\neq 0 \\ 1, & z=0 \end{cases}$，可以對 z=0 展開成在圓盤中收斂的冪級數。

(c) 一階 pole。不可以對 z=0 展開成在圓盤中收斂的冪級數。

(d) 本性奇点，不可以對 z=0 展開成在圓盤中收斂的冪級數。

(e) 本性奇点，不可以對 z=0 展開成在圓盤中收斂的冪級數。

2. Are the following statements true or false? If it is false, explain the reason. (16%)

(a) If $u(x,y)$ is harmonic in D, then it is the real part of an analytic function $f(z)$ in D.

(b) The real and imaginary parts of a complex analytic function are harmonic.

(c) If two analytic functions have the same real part $u(x,y)$, then $f(z)=g(z)$ identically.

(d) If $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ with $u(x,y), v(x,y)$ harmonic, then $f(z)$ is analytic.

(a)不對，解析複變函數的實部和虛部函數為諧和函數，反之不真。

(b)對。

(c)不對，虛部可能差一個常數。

(d) 不對，解析複變函數的實部為諧和函數，反之不真。

3. Solve the following equation (15%)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=0$$

in a unit disk with $u=1+\theta$ on the boundary.

根據講義 第 24 章

$$u(r,\theta)=\alpha_0+\sum_{1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)r^n$$

代入邊界條件 $u(1,\theta)=1+\theta$

$$u(1,\theta)=\alpha_0+\sum_{1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)=1+\theta$$

得

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 1+\pi,\\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta\cos n\theta d\theta=0,\\ \beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta\sin n\theta d\theta=\frac{-2}{n}\end{aligned}$$

，

4. Let $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})/r^n$, where $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ and n is a positive integer.

(a) Show that $div\boldsymbol{F}=(3-n)/r^n$ (4%)

(b) Evaluate the surface integral $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$ for $n=2$ where S is the sphere $x^2+y^2+z^2=a^2$. Can you use the divergence theorem?(5%)

(c) Evaluate the surface integral $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$ for $n=3$ where S is the sphere $x^2+y^2+z^2=a^2$. Can you use the divergence theorem? (5%)

(a) $\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r^n}$

$$\nabla\bullet\vec{F}=\nabla\bullet\left(\frac{\vec{r}}{r^n}\right)=\frac{1}{r^n}\nabla\bullet\vec{r}+\vec{r}\bullet\nabla\left(\frac{1}{r^n}\right)$$

又 $\nabla\left(\frac{1}{r^n}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^n}\right)\nabla r=\frac{-n}{r^{n+1}}\frac{\vec{r}}{r}$ ，$\nabla\bullet\vec{r}=3$代回上式，

$$\nabla\bullet\vec{F}=\nabla\bullet\left(\frac{\vec{r}}{r^n}\right)=\frac{1}{r^n}\nabla\bullet\vec{r}+\vec{r}\bullet\nabla\left(\frac{1}{r^n}\right)$$

$$=\frac{3}{r^n}+\vec{r}\bullet\left(\frac{-n}{r^{n+1}}\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{3-n}{r^n}$$

可得證。

(b)

$$\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$\oiint_S \vec{F}\bullet\hat{n}dA=\oiint_S \frac{\vec{r}}{r^2}\bullet\frac{\vec{r}}{r}dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{a}a^2\sin\theta d\theta d\phi=4\pi a$$

若使用高斯散度定理

$$\oiint_S \vec{F}\bullet\hat{n}dA=\iiint_V \nabla\bullet\vec{F}dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{1}{r^2}r^2\sin\theta d\theta d\phi=4\pi a$$

所以可以使用高斯散度定理。

(c)

$$\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\oiint_S \vec{F}\bullet\hat{n}dA=\oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3}\bullet\frac{\vec{r}}{r}dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{a^2}a^2\sin\theta d\theta d\phi=4\pi$$

若使用高斯散度定理

$$\oiint_S \vec{F}\bullet\hat{n}dA=\iiint_V \nabla\bullet\vec{F}dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}0\times r^2\sin\theta d\theta d\phi=0$$

所以不可以使用高斯散度定理。

5. Determine all possible solutions for the following equation

$$\begin{bmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

where λ is any real number.(15%)

假設方程式爲：$(A-\lambda I)x=0$

A 的特徵值為 $2, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$ ，

對應的特徵向量分別為 $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

當 λ 不是特徵值時，唯一解 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，

當 λ 是特徵值之一時，對應的特徵向量，乘上一個常數 c_1 ，即為此聯立方程組的解答，因為特徵向量就是 $(A-\lambda I)x = 0$ 的零空間。

6. Bessel's equation is:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Determine the nature of the singularity at $x = \infty$ by transforming the independent variable to $z = 1/x$. (15%)

自變數轉換，應使用鍊鎖律

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} + \frac{-1}{x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dt^2}$$

将上面兩式代回原式，

即得 $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (\frac{1}{t^2} - n^2)y = 0$ 。

1. Solve the differential equation $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{2x+y+1}$.[Hint: let $u=2x+y$] (20)

令 $u=2x+y$，故 $y=u-2x, y'=u'-2$，代回方程式

$$\frac{du}{dx}-2=\frac{u}{u+1},\frac{du}{dx}=\frac{3u+2}{u+1}\text{ ， }\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3u+2}\right)du=dx$$

積分可得 $u+\frac{\ln(3u+2)}{3}=3x+c$

即 $(2x+y)+\frac{1}{3}\ln(6x+3y+2)=3x+c$

2. (a) Explain Cauchy-Riemann equations.
   (b) Give the real part $u(x,y)=x^2-y^2$ of an analytic complex function $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, find the imaginary part $v(x,y)$.
   (c) Determine the derivative of $f(z)$. (20)

(a)哥西里曼方程式。見上課筆記第 10 章。

(b)利用哥西里曼方程式

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y\\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x\end{cases}\text{，解出 } v(x,y)=2xy+c$$

(c) $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+i2y=2z$

3. (a) Explain half-range Fourier series expansion.
   (b) Expand the function $f(x)=x^2,\quad 0<x<\pi$ in a Fourier series and in a Fourier sine series (half-range expansion). (20)

(a) 傅立業半幅餘弦級數展開： $f(x)=a_0+\sum_1^\infty a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}, x\in(0,\ell)$

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(x)dx, a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

傅立業半幅正弦級數展開： $f(x)=\sum_1^\infty b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}, x\in(0,\ell)$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

(b) 傅立業級數展開： $f(x)=a_0+\sum_1^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{\ell}+b_n \sin\frac{2n\pi x}{\ell}, x\in(0,\ell)$

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx, a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{\ell}dx, b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{\ell}dx,$$

取： $\ell=\pi, f(x)=x^2$

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos 2nxdx=\frac{1}{n^2}$$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin 2nxdx=\frac{-\pi}{n}$$

傅立業半幅正弦級數展開： $f(x)=\sum_1^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, x\in(0,\ell)$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

取： $\ell=\pi, f(x)=x^2$

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dxb_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi^2}{n}(-1)^n-\frac{2}{n^3}\left(1-(-1)^n\right)\right)$$

4. (a) Explain the directional derivative of a function.

(b) Find the directional derivative of the function $f(x,y)=x+y^2$ at point $(3,4)$ in the direction $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

(c) Find the maximum directional derivative of the function $f(x,y)=x+y^2$ at point $(3,4)$.(20)

(a) 純量場沿著某一個給定方向的變化率： $\frac{d\phi}{ds}=\nabla\phi\bullet\hat{u}$ 。

(b) $\frac{d\phi}{ds}=\nabla\phi\bullet\hat{u}=(1,2y)\Big|\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)_{x=3,y=4}=\frac{17}{\sqrt{5}}$ 。

(c) 純量場沿著梯度方向會有最大的變化率： $|\nabla\phi|=\sqrt{65}$ 。

5. Calculate the double integration $\iint_R xydxdy = ?$, where $R:\begin{cases}0 < x+y < 2\\ 0 < x-y < 2\end{cases}$.[Hint: let $u = x+y$, $v = x-y$] (20)

$$\begin{cases}u = x+y\\ v = x-y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \dfrac{u+v}{2}\\ y = \dfrac{u-v}{2}\end{cases},$$

Jacobian 行列式= $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}$,

所以原式= $\dfrac{1}{4}\int_0^2\int_0^2 \left(u^2 - v^2\right)\dfrac{1}{2}dudv = \dfrac{1}{8}\int_0^2\left(\dfrac{8}{3} - 2v^2\right)dv = 0$ 。

國立成功大學九十六學年度碩士班招生考試試題

編號： 134 系所：土木工程學系丁組 科目：工程數學

1. Solve the differential equation $\frac{dy}{dx}=(x+y+1)^2$.[Hint: let $u=x+y+1$] (20)

2. (a) Explain Cauchy-Riemann equations.

(b) Give the real part $u(x,y)=x^2-y^2$ of an analytic complex function $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, find the imaginary part $v(x,y)$.

(c) Determine the derivative of $f(z)$. (20)

3. (a) Explain half-range Fourier series expansion.

(b) Expand the function $f(x)=x+1,\quad 0<x<\pi$ in a Fourier series and in a Fourier sine series (half-range expansion). (20)

4. (a) Explain the directional derivative of a function.

(b) Find the directional derivative of the function $f(x,y)=x^2+y^2$ at point $(3,4)$ in the direction $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

(c) Find the maximum directional derivative of the function $f(x,y)=x^2+y^2$ at point $(3,4)$.

(20)

5. Calculate the double integration $\iint_R xy\,dx\,dy=?$, where $R:\begin{cases}0<x+y<2\\0<x-y<2\end{cases}$.[Hint: let $u=x+y$, $v=x-y$] (20)

1.

令 $u=x+y+1$，故 $y=u-x-1, y'=u'-1$，代回方程式

$\frac{du}{dx}-1=u^2$，$\frac{du}{1+u^2}=dx$

積分可得 $\tan^{-1}u=x+c$

即 $\tan^{-1}(x+y+1)=x+c, y=\tan(x+c)-x-1$

其他題目解法同乙組。

國立交通大學 96 學年度碩士班考試入學試題

科目：工程數學(3051) (3061)　　考試日期：96 年 3 月 18 日 第 1 節

系所班別：土木工程學系　　組別：土木所甲組一般生/甲組在職生第 1 頁,

1. Solve the differential equation by using the Laplace transform: (25%)

$$y''+2y'+2y=r(t),\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$$

$$r(t)=\begin{cases} 0 & 0<t<\pi \\ 4\cos 2t & \pi<t<2\pi \\ 0 & 2\pi<t \end{cases}$$

依據題意，將方程式寫爲 $y''+2y'+2y=4\cos 2t\left(u(t-\pi)-u(t-2\pi)\right)$

再改寫 $y''+2y'+2y=4\left(\cos 2(t-\pi)u(t-\pi)-\cos 2(t-2\pi)u(t-2\pi)\right)$

將此方程式取拉普拉斯變換，配合移位定理

$$2\,Y[s]+2\,s\,Y[s]+s^2\,Y[s]=4\left(-\frac{e^{-2\pi s}\,s}{4+s^2}+\frac{e^{-\pi s}\,s}{4+s^2}\right)$$

$$Y[s]\to\frac{4\,e^{-2\pi s}\,(-1+e^{\pi s})\,s}{8+8\,s+6\,s^2+2\,s^3+s^4}$$

取部分分式：

$$-\frac{8\,e^{-2\pi s}}{5\,(4+s^2)}+\frac{8\,e^{-\pi s}}{5\,(4+s^2)}+\frac{2\,e^{-2\pi s}\,s}{5\,(4+s^2)}-\frac{2\,e^{-\pi s}\,s}{5\,(4+s^2)}+$$
$$\frac{4\,e^{-2\pi s}}{5\,(2+2\,s+s^2)}-\frac{4\,e^{-\pi s}}{5\,(2+2\,s+s^2)}-\frac{2\,e^{-2\pi s}\,s}{5\,(2+2\,s+s^2)}+\frac{2\,e^{-\pi s}\,s}{5\,(2+2\,s+s^2)}$$

取反轉換

$$-\frac{2}{5}\,e^{2\pi-x}\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{UnitStep}[-2\pi+x]+\frac{2}{5}\,\mathrm{Cos}[2\,x]\,\mathrm{UnitStep}[-2\pi+x]+$$
$$\frac{6}{5}\,e^{2\pi-x}\,\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{UnitStep}[-2\pi+x]-\frac{8}{5}\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{UnitStep}[-2\pi+x]-\frac{2}{5}\,e^{\pi-x}\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{UnitStep}[-\pi+x]-$$
$$\frac{2}{5}\,\mathrm{Cos}[2\,x]\,\mathrm{UnitStep}[-\pi+x]+\frac{6}{5}\,e^{\pi-x}\,\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{UnitStep}[-\pi+x]+\frac{8}{5}\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{UnitStep}[-\pi+x]$$

2. Find a general solution of the following systems of ODEs by the method of undetermined coefficients: (25%)

$$y_1'=2\,y_1+2\,y_2+5e^{4t}$$
$$y_2'=5\,y_1-\,y_2-2e^{4t}$$

根據題意，這個題目要用 通解=齊性解+特別解，
齊性解 我們用矩陣法，特別解再使用未定係數法的方式求得。

先解齊性解，利用矩陣解法，$A=\begin{bmatrix}2 & 2\\5 & -1\end{bmatrix}$，

特徵值爲 $\lambda=-3,4$，對應的特徵向量爲：$\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，

所以對應的齊性解爲：$\begin{bmatrix}y_{1h}\\y_{2h}\end{bmatrix}=c_1e^{-3t}\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}+c_2e^{4t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，

再假設特別解 $\begin{bmatrix}y_{1p}\\y_{2p}\end{bmatrix}=te^{4t}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}+e^{4t}\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$

代回方程式 ，

解得 $a=3,b=3,c=\frac{2}{7},d=\frac{-5}{7}$。

3. If λ's are eigenvalues of $\mathbf{A}$,

(a) Show that the eigenvalues of $\mathbf{A}^{-1}$ are $1/\lambda$. (6%)

(b) Show that the eigenvalues of $\mathbf{A}^2$ are λ^2. (6%)

(c) If matrix $\mathbf{A}$ has characteristic determinant $\mathbf{D}(\lambda)=(\lambda-0.5)(\lambda-0.6)(\lambda-1)$, where λ is the eigenvalue of $\mathbf{A}$, what are the eigenvalues of $2\mathbf{A}^{-1}$. (8%)

(a) (b) 見上課筆記第 6 章。
(c) 將特徵值取倒數之後，乘以 2，

可得新的特徵值爲：$4,\frac{10}{3},2$。

4. Consider a steady flow flowing with velocity $\vec{v}(t) = -y(t)\vec{i} + x(t)\vec{j}$

(a) Find the position vector, $\vec{r}(t)$, of the flow at any time t. (10%)

(Hint: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$; $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$)

(b) If some particle of the flow is initially (i.e. t = 0) at position (1,0), where will it be at time t = π/2 ? (5%)

(c) What is the trajectory of the flow? (5%)

(d) Is the flow incompressible？ (5%)

(e) Is the flow rotational？ (5%)

(a)

解聯立微分方程組：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases},$$

解得 $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos t - c_2 \sin t \\ c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{bmatrix}$ 。

(b)

將 $t = 0, x = 1, y = 0$ 代入 (a)部分的解答

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \bullet 0 \\ c_1 \bullet 0 + c_2 \end{bmatrix}$ ，求出： $c_1 = 1, c_2 = 0$

即特解爲： $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$

再代入 $t = \dfrac{\pi}{2}$ ，求出： $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

(c)

根據流線的定義： $d\vec{r} \,//\, \vec{v}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1$$

(d) $\nabla \bullet \vec{v} = 0$ ，所以流場爲不可壓縮。

(e) $\nabla \times \vec{v} = 2 \neq 0$ ，所以流場爲旋轉的。

國立交通大學 96 學年度碩士班考試入學試題

科目：工程數學(3081) (3091)　　考試日期：96 年 3 月 18 日 第 1 節

系所班別：土木工程學系　　組別：土木所丙組一般生/丙組在職生 第 1 頁，

1. A forced undamped oscillator can be expressed by a second-order nonhomogeneous equation of $y''(t)+16y=f(t)$. Please find the homogeneous solution (5%). If $f(t)=e^{4t}$, find the particular solution (5%). If $f(t)=\sin 4t$, find the particular solution (10%).

(a) 齊性解： $y_h(t)=c_1\cos 4t+c_2\sin 4t$

(b) $f(t)=e^{4t}\Rightarrow$特別解用未定係數法，

假設 $y_p(t)=ae^{4t}$ 代回方程式，

解得 $y_p(t)=\dfrac{1}{32}e^{4t}$

$f(t)=\sin 4t\Rightarrow$特別解用拉普拉斯變換，取初始條件： $y(0)=y'(0)=0$

(c) $y_p(t)=L^{-1}\left[\dfrac{4}{(s^2+16)^2}\right]=\dfrac{1}{4}\sin 4t*\sin 4t=\dfrac{1}{4}\int_0^t \sin 4\tau\sin 4(t-\tau)\,d\tau$

將迴旋積分，直接取積分：

$$y_p(t)=\frac{1}{4}\int_0^t\frac{-1}{2}\left(\cos 4t-\cos(8\tau-4t)\right)=\frac{1}{32}\left(-4t\cos(4t)+\sin 4t\right)$$

2. If temperature is a function of position and time, the rate of change of temperature can be expressed by $dT/dt = \partial T/\partial t + (\vec{v}\cdot\nabla)T$ where $\vec{v}$ is the velocity of the flow. If $T = 10t^2 + 2(x^2 + y^2)$ and $\vec{v} = 2tx\vec{i} - y\vec{j}$, please find dT/dt at the point (x, y)=(1, 2) for time t=3. (15%)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\bullet\nabla)T = 20t + \left(2tx\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(10t^2 + 2\left(x^2 + y^2\right)\right) = 20t + 8tx^2 - 4y^2$$

代入 $x = 1, y = 2, t = 3$ 得 $\frac{dT}{dt} = 68$

3. If a function is given by $f(t) = t + \pi, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(t) = f(t + 2\pi)$, please find its Fourier series (15%)

[Note: $a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt$, $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$, $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt$ **]**

傅立業級數展開： $f(x) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{\ell}, x \in (0, \ell)$

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx, a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{\ell}dx, b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{\ell}dx,$$

依據題意，取： $\ell = 2\pi, f(t) = t + \pi$ ，

明顯的 $a_0 = \pi, a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{-2}{n}(-1)^n$$

4. Find a general solution of $xy'' + 3y' + x^{-1}y = 0$ (15%)

本題為哥西方程式，求齊性解

令 $y = x^m$ ，代入方程式，

輔助方程式： $m^2 + 2m + 1 = 0$ ，解得 $m = -1, -1$ ，

故通解為： $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x}\ln x$

5. Find the moment of inertia I of a homogeneous spherical lamina

$S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ of mass M about the z-axis. (15%)

假設這個均質球體，密度爲 ρ

$$I = \int\int\int \rho\left(x^2 + y^2\right)dxdydx = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2 \sin\theta \bullet r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$$

$$= \frac{\rho a^5}{5}\frac{\pi}{2}2\pi = \frac{\rho\pi^2 a^5}{5}$$

6. (a) Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{1+x^4}dx$ (10%)

(b)Find the Cauchy principal value of the integral: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2 - ix}$ (10%)

(a)

積分核爲奇函數，所以積分等於零。

(b)

原式 $= 2\pi i \times\left(\frac{1}{2}R\left(0\right) + R(i)\right) = 2\pi i \times\left(\frac{i}{2} - i\right) = \pi$

1. Function $k_n(x)$ is a function of x with degree n. The following recursive relationship of $k_n(x)$ holds: $k_n(x) = xk_{n-1}(x) + \frac{x^2}{2}k_{n-2}(x)$. It is known that $k_0(x) = 3, k_1(x) = 2x$. Compute $k_3(x)$ at $x = 2$. (15%)

$$k_2(x) = xk_1(x) + \frac{x^2}{2}k_0(x) = 2x^2 + \frac{3x^2}{2} = \frac{7x^2}{2}$$

$$k_3(x) = xk_2(x) + \frac{x^2}{2}k_1(x) = \frac{7x^3}{2} + \frac{2x^3}{2} = \frac{9}{2}x^3$$

$$k_3(x=2) = 36$$

2. $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ are invertible matrices. Show that (20%)

$$(\mathbf{A} + \mathbf{CD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1}$$

根據反矩陣的定義 ：$(A+CD)^{-1}(A+CD) = I$

$$A^{-1}\left(A^{-1} + D^{-1}C^{-1}\right)^{-1} D^{-1}C^{-1}(A+CD)$$
$$= A^{-1}\left(A^{-1} + D^{-1}C^{-1}\right)^{-1}(D^{-1}C^{-1}A + I)$$
$$= \left(\left(A^{-1} + D^{-1}C^{-1}\right)A\right)^{-1}(D^{-1}C^{-1}A + I)$$
$$= (D^{-1}C^{-1}A + I)^{-1}(D^{-1}C^{-1}A + I)$$
$$= I$$

故得證

3. Solve $y'' - y' - 2y = 0$. (15%)

令 $y = e^{mx}$ 代入方程式，得輔助方程式 $m^2 - m - 2 = 0$
解得 $m = 2, -1$，

故齊性解爲： $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$ 。

4. A point P is dragged along the xy plane by a string PS of length t. If the S end of the string starts at the origin and moves along the positive y axis, and if the P end of the string starts at (t, 0), what is the path of P? (15%)

題意不清，題目有問題。

5. Solve the following initial value problems:

(a) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, y(0) = 0, y'(0) = -2$ (10%)

(b) $y'' + 4y' + 20y = 23\sin t - 15\cos t, y(0) = 0, y'(0) = -1$ (10%)

這兩題都應該取拉是轉換求解比較方便。

(a) $-2\,y[t] - y'[t] + y''[t] == 3\,e^{2t}$

$$2 - 2\,Y[s] - s\,Y[s] + s^2\,Y[s] == \frac{3}{-2+s}$$

$$Y[s] \to \frac{7-2s}{(-2+s)^2\,(1+s)}$$

$$y[t] \to e^{-t}\,(1 + e^{3t}\,(-1+t)$$

(b) $20\,y[t] + 4\,y'[t] + y''[t] == -15\,\mathrm{Cos}[t] + 23\,\mathrm{Sin}[t]$

$$1 + 20\,Y[s] + 4\,s\,Y[s] + s^2\,Y[s] == \frac{23}{1+s^2} - \frac{15\,s}{1+s^2}$$

$$Y[s] \to \frac{22 - 15\,s - s^2}{(1+s^2)\,(20 + 4\,s + s^2)}$$

$$y[t] = e^{-2t}\cos(4t) + \sin t - \cos t$$

6. Find solutions $u(x,y)$ of the following partial differential equation: (15%)

$$u_x + u_y = 2(x+y)u$$

根據一階 PDE 的求解理論，知輔助方程式： $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{du}{2(x+y)}$

再由 $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{1} \Rightarrow x - y = c_1$

後由 $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{du}{2\left(x+y\right)}\Rightarrow\frac{dx+dy}{1}=\frac{du}{2\left(x+y\right)}\Rightarrow u=\left(x+y\right)^2+c_2$

又 $c_2=f\left(c_1\right)$，$f\left(x\right)$ 爲任意函數，

所以 $u=\left(x+y\right)^2+f\left(x-y\right)$

國立中興大學96學年度碩士班招生考試試題

科　目：工程數學　　　　　　　　　　　　所　別：土木工程學系乙組

(10%) 1. Solve $D^3\ (D^2-1)(D^2+4)^2\ y=0$, and $D=\dfrac{d}{dt}$.

(14%) 2. Find

(a) Laplace transform of $f(t)=e^{-3t}\int_0^t \alpha\sin\alpha\, d\alpha$.

(b) Inverse Laplace transform of

$$F(s)=\frac{1+e^{-4s}}{s^2-2s-3}.$$

(15%) 3. Evaluate $\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}^{31}$.

(16%) 4. Consider vector differential calculus. Let $g=xy^3z^2$, $h=x^2+9y^2+4z^2$,

and $\vec{W}=2y\,\vec{i}+4z\,\vec{j}+x^2z^2\,\vec{k}$, to determine

(a) div(*grad h*),　(b) $\nabla g\bullet\nabla h$,　(c) grad (*div* $\vec{W}$),　and (d) curl ($g\,\vec{i}$).

1.令 $y=e^{mx}$ 代入原方程式，

解得輔助方程式的根爲： $m=0,0,0,1,-1,2i,2i,-2i,-2i$ ，

故齊性解： $y_h(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3e^x+c_4e^{-x}+(c_5+c_6x)\cos 2x+(c_7+c_8x)\sin 2x$

2.

(a)分三步驟，取拉普拉斯變換：

$$L[t\sin t]=\frac{-d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$L\left[\int_0^t \alpha\sin\alpha dt\right]=\frac{2}{(s^2+1)^2}$$

$$L\left[e^{-3t}\int_0^t \alpha\sin\alpha dt\right]=\frac{2}{\left((s+3)^2+1\right)^2}$$

(b) 取部分分式後，再取拉氏反轉換：

$$L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[\left(1-e^{-4s}\right)\left(\frac{1/4}{s-3}+\frac{-1/4}{s+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{3t}-e^{-t}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{3(t-4)}-e^{-(t-4)}\right)u(t-4)$$

3. 本題爲矩陣函數，先求特徵值 $\lambda=-6,-1$

對應的特徵向量爲：$\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

取過渡矩陣 $P=\begin{bmatrix}-2&1\\1&2\end{bmatrix}$

$A^{31}=PD^{31}P^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-6)^{31}&1\\1&(-1)^{31}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/5&1/5\\1/5&2/5\end{bmatrix}$。

4.

(a) $\nabla\bullet(\nabla h)=\nabla^2 h=\nabla^2\left(x^2+9y^2+4z^2\right)=14$

(b) $\nabla g\bullet\nabla h=\left(y^3z^2,3xy^2z^2,2xy^3z\right)\bullet(2x,18y,8z)=72xy^3z^2$

(c) $\nabla\left(\nabla\bullet\vec{w}\right)=\nabla\left(2x^2z\right)=\left(4xz,0,2x^2\right)$

(d) $\nabla\times\left(g\ \hat{i}\right)=\nabla\times\left(xy^3z^2\ \hat{i}\right)=\left(0,2xy^3z,-3xy^2z^2\right)$

(10%)5. Interpret the physical meanings of Fourier series and Fourier transform, espectively.

(20%)6. Solve the following partial differential equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-G \qquad \text{(G: acceleration of gravity)}$$

boundary conditions: u(0, t)=0

u(L, t)=0

initial conditions: u(x, 0)=f(x)

u_t(x, 0)=g(x)

5.

傳立業級數是把週期波，分解成很多離散頻率諧波(harmonic wave)的線性組合。

傳立業積分或者是傳立業變換是把一個非週期波，分解成連率頻率的諧波的組合。

6. 二階非齊性的波動方程式： $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-G$

利用特徵函數展開法，

由方程式及邊界條件可知 $u(x,t)=\sum_{1}^{\infty}C_n(t)\sin nx$

將上式代回波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-G$ ，

可得 $\sum_{1}^{\infty}\left[C_n''(t)+\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}C_n(t)\right]\sin\dfrac{n\pi}{L}x=-G=\sum_{1}^{\infty}\dfrac{-LG}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin\dfrac{n\pi}{L}x$

解出 $C_n(t)=a_n\cos\dfrac{n\pi t}{L}+b_n\sin\dfrac{n\pi t}{L}-\dfrac{L^3G}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)$

代入初始條件 $u(x,0)=f(x)=\sum_{1}^{\infty}a_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}-\dfrac{L^3G}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)$

得 $a_n=\dfrac{2}{L}\int_0^L\left(f(x)+\dfrac{L^3G}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right)\right)\sin\dfrac{n\pi x}{L}dx$

再代入另一個初始條件 $u_t(x,0)=g(x)=\sum_{1}^{\infty}\dfrac{n\pi b_n}{L}\sin\dfrac{n\pi x}{L}$

得 $b_n=\dfrac{2}{n\pi}\int_0^L(g(x))\sin\dfrac{n\pi x}{L}dx$ 。

(15%)7. Evaluate

(a) $$\oint_{\Gamma}\frac{1}{z^2+1}dz,$$

where Γ is a closed path enclosing both i and $-i$. (7%)

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^6+64}dx$$ (8%)

(a) 根據留數定理

原式 $=2\pi i\times\left(R(i)+R(-i)\right)=0$

(b) 參考課本第 12 章的作法

原式= $2\pi i\times\left(R\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)+R\left(2e^{i\frac{3\pi}{6}}\right)+R\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\right)$

$R\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=\lim_{z\to 2e^{i\frac{\pi}{6}}}\frac{1}{6z^5}-\lim_{z\to 2e^{i\frac{\pi}{6}}}\frac{z}{-6}=\frac{-1}{192}e^{i\frac{\pi}{6}}$（注意這個留數計算的代數技巧）

同理 $R\left(2e^{i\frac{3\pi}{6}}\right)=\frac{-1}{192}e^{i\frac{3\pi}{6}}$ ，$R\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)=\frac{-1}{192}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

將上面三個留數的結果，代回 $2\pi i\times\left(R\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)+R\left(2e^{i\frac{3\pi}{6}}\right)+R\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\right)$

故 原式＝ $2\pi i\times\left(\frac{-2i}{192}\right)=\frac{\pi}{48}$ 。

國立中興大學96學年度碩士班招生考試試題

科　目：工程數學　　　　　　　　　　所　別：土木工程學系丙組

(10%) 1. Solve $D^3\ (D^2-4)(D^2+1)^2\ y=0$, and $D=\dfrac{d}{dt}$.

(16%) 2. Find

(a) Laplace transform of $f(t)=e^{-3t}\int_0^t \alpha\sin\alpha d\alpha$.

(b) Inverse Laplace transform of

$$F(s)=\frac{1+e^{-4s}}{s^2-2s-3}.$$

(18%) 3. Evaluate $\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}^{27}$.

(16%) 4. Consider vector differential calculus. Let $g=xy^3z^2$, $h=x^2+9y^2+4z^2$,

and $\vec{W}=2y\vec{i}+4z\vec{j}+x^2z^2\vec{k}$, to determine

(a) div($grad\ h$), (b) $\nabla g\bullet\nabla h$, (c) grad ($div\ \overline{W}$), and (d) curl ($g\ \overline{i}$).

(20%) 5. (a) Find the Fourier series.

$$f(x)=\begin{cases}k(-\pi/2<x<\pi/2)\\ 0(\pi/2<x<3\pi/2)\end{cases}.$$

(b) Evaluate $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$

(20%) 6. Drive and solve the one-dimensional wave equation.

1,2,3,4 同甲組。

5 (a)

$L=2\pi$

$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$

明顯的，畫出圖以後，可以看出 f(x)為偶函數，

所以 $b_n = 0, a_0 = \frac{k}{2}$ ，

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} k\cos nx dx = \frac{2k}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

所以 $f(x) = \frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos nx$

(b)

代入 x=0

$$k = \frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

6.推導一維的波動方程式：

(1)取一小段彈性弦，長度為 dx，

將作用在弦兩端的張力沿著 x,y 兩個方向作力的分解：

水平合力= $T_0 = T_1\cos\theta = T_2\cos(\theta + d\theta)$

垂直分力= $T_2\sin(\theta + d\theta) - T_1\sin\theta = T_0\left(\tan(\theta + d\theta) - \tan\theta\right)$

(2) 又因為 $\tan\theta = u_x(x,t)$ ，所以 $T_0\left(\tan(\theta + d\theta) - \tan\theta\right) = T_0\left(u_x(x+dx,t) - u_x(x,t)\right)$

根據牛頓第二運動定律 $F = ma$ ，

垂直方向有： $= \rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(u_x(x+dx,t) - u(x,t)\right)$

化簡可得： $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho}\left(\frac{u_x(x+dx,t) - u(x,t)}{dx}\right)$

(3) 取 $dx \to 0$ ， $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ ，

上式可變為： $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

故得證。

若有考慮外力，則方程式可以變為： $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ 。

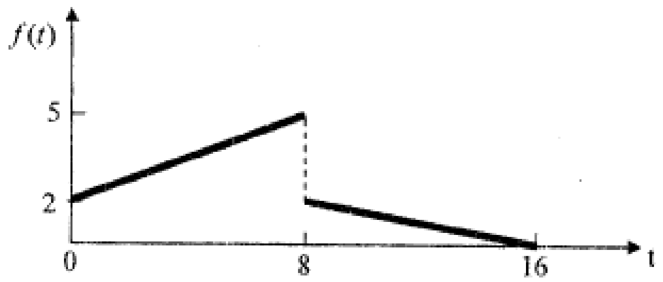
國立中央大學96學年度碩士班考試入學試題卷 共 1 頁 第 1 頁

所別：土木工程學系碩士班 甲組 科目：工程數學

1. (10%)

(a) (5%) 請用單位階梯函數(unit step function)表示下圖所示之函數 $f(t)$=?

(b) (5%) 請求下圖所示函數 $f(t)$ 之 Laplace 轉換 (transform)，$L(f(t)) = F(s)$=?



(a)將圖形改寫成階梯函數的形式：

$$f(t) = \left(2+\frac{3}{8}t\right)\left(u(t)-u(t-8)\right)+\left(2-\frac{1}{8}(t-8)\right)\left(u(t-8)-u(t-16)\right)$$

$$= \left(2+\frac{3}{8}t\right)u(t)+\left(-\frac{1}{2}(t-8)-3\right)u(t-8)+\left(\frac{1}{8}(t-16)-1\right)u(t-16)$$

(b) 將上式取拉普拉斯變換：

$$F(s) = \frac{2}{s}+\frac{3}{8}\frac{1}{s^2}-e^{-8s}\left(\frac{3}{s}+\frac{1}{2s^2}\right)+e^{-16s}\left(\frac{-1}{s}+\frac{1}{8s^2}\right)$$

2. (15%)

求解以下之四階常微分方程之通解 $y(x)$ = ?

$$y^{(4)}+10y^{(2)}+9y = 2\sinh x$$

先解齊性解：令 $y_h = e^{mx}$ ，解出 $m = i, -i, 3i, -3i$

所以 y[x]=C3 Cos[x]+C1 Cos[3 x]+C4 Sin[x]+C2 Sin[3 x]

再解特別解 令 $y_p = ae^{x}+be^{-x}$

代入 $y^4+10y''+9y = e^{x}-e^{-x}$ ，

比較係數可得： $a = b = \frac{1}{20}$ 。

故 通解=齊性解+特別解

3. (15%)

向量 $\mathbf{A} = 3y\vec{i} - xz\vec{j} + yz^2\vec{k}$ ，S 爲以 $2z = x^2 + y^2$ （$z \le 2$）表示之曲面，C 爲曲面 S 之邊界曲綫 (boundary curve)，請求以下封閉積分

$$\oint_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = ?$$

(其中 r 爲邊界曲綫 C 上點之位置向量(position vector), $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分別爲 x, y, z 坐標軸上之單位向量)。

直接取用 Stokes' 旋度定理：$\oint_C \vec{A} \bullet d\vec{r} = \iint_R (\nabla \times \vec{A}) \bullet \vec{n} dA$

又 $\nabla \times \vec{A} = (\cdots, \cdots, -z-3)$ ，$z = 2, \hat{n} = \hat{k}$ ，$C: x^2 + y^2 = 4$

所以 $\oint_C \vec{A} \bullet d\vec{r} = \iint_R (\nabla \times \vec{A}) \bullet \vec{n} dA = \int \int (-z-3) dA = \int \int (-5) dA = -20\pi$ 。

4. (20%)

設 A 與 B 皆爲 4 x 4 方陣，且 $B = (B_{ij}) = A^n$ （n 爲正整數）。又設

$$A = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

求出 B_{32} 的值。

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & .x \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & .x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & .x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 2 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & .x \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 2 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & .x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & .x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 3 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & .x \end{bmatrix}, \cdots,$$

$$A^n = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & n-1 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & .x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & n & 1 & x \\ x & 0 & 0 & .x \end{bmatrix}$$

所以$B_{32} = n$

5. (10%)

設 Γ 代表複數平面上的單位圓，其方程式為 $|z| = 1$ ，$z = x + iy$， $i = \sqrt{-1}$ 。請計算出閉迴路積分

$\oint e^{\frac{1}{z}} dz$ 。 提示： 可應用 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 公式去求出 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z = 0$位置上的留數(residue).

使用留數定理

又利用級數展開： $e^{1/z} = 1 + 1/z + \frac{(1/z)^2}{2!} + \cdots$ ，所以$R(0) = 1$

原式=$2\pi i \times R(0) = 2\pi i$ 。

6. (10%)

(a)(3%) 一維熱傳導方程式屬於偏微分方程式的哪一類方程式？

(b)(4%) 傅氏轉換和傅氏級數用於求解一維熱傳導問題時，所解的問題有何不同？

(c)(3%) 在何種情形下，可以推得傅氏餘弦變換(Fourier Cosine Transform)？

(a)拋物線形。

(b)傅立業級數解有限區間，傅立業變換解無限區間。看邊界條件決定。

(c) $B.C.: u_x(0,t) = 0, x \in (0, \infty)$

7. (10%)

已知一條兩端固定的弦之長度為π ，波速為 1，若此弦受到初始位移 $f(x) = k\sin 3x$ ；初始速度 $g(x) = -0.01\sin x$ ，求其位移？

一維波動方程式 ： $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

B.C.:$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

I.C.:$u(x,0) = k\sin 3x$,$u_t(x,0) = -0.01\sin x$

由方程式和邊界條件可知 解答為 ：$u(x,y) = \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin 3x$

由初始條件$u(x,0) = k\sin 3x$ ，知$a_1 = a_2 = 0 = a_4 = a_5 = \cdots, a_3 = k$ ，

由初始條件$u_t(x,0) = -0.01\sin x$ ，知$b_1 = -0.01, b_2 = 0 = b_3 = \cdots$ 。

8. (10%)

利用 $f(x)=e^{-x}$ (x>0) 計算 $\int_0^\infty \frac{\cos x\omega}{1+\omega^2}d\omega$ $x>0$。

直接 求 $f(x)=e^{-x}$的傅立業餘弦積分： $f(x)=\int_0^\infty A(w)\cos wx dw$

係數 $A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos wx dx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+w^2}$

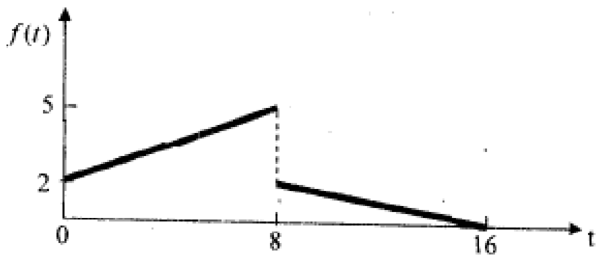
所以 $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1+w^2}dw \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos wx}{1+w^2}dw=\frac{\pi}{2}e^{-x}$

所別：土木工程學系碩士班 科目：工程數學 丙組

1. (15%)

(a) (5%) 請用單位階梯函數(unit step function)表示下圖所示之函數 $f(t)$=?

(b) (10%) 請求下圖所示函數 $f(t)$ 之 Laplace 轉換 (transform)，$L(f(t))=F(s)$=?



2. (20%)

(a) (5%) 請寫出 n 階非齊性線性常微分方程(n[th] order, Linear Non-homogeneous Ordinary Differential Equation) 之廣義式表示式。

(b) (15%) 求解以下之四階常微分方程之通解 $y(x)=?$

$$y^{(4)}+10y^{(2)}+9y=2\sinh x$$

3. (6%)

(a)(3%) 函數 f 的 n 階微分的傅氏轉換爲何？

(b)(3%) 在何種情形下，可以推得傅氏餘弦變換(Fourier Cosine Transform)？

4. (10%)

利用 $f(x)=e^{-x}$ (x>0) 計算 $\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega \quad x>0$

5. (14%)

$f(x)=\frac{x^2}{4} \quad -\pi<x<\pi$ 之週期爲 2π

(a)(10%)求傅氏級數展開式。

(b)(4%)利用(a)的結果計算 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\bullet\bullet\bullet\bullet$ 。

6. (35%)

設 A 與 B 皆爲 4 x 4 方陣，且 $B=(B_{ij})=A^n$ （n 爲正整數）。又設

$$A=(A_{ij})=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) (20%)求出 B_{32} 的值。

(b) (15%)計算出 $\det B$ （B 的行列式）。

1. 同甲組。

2.

(a) $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots y, x) = C$

(b) 同甲組。

3.

(a) $F\left[f^{(n)}(x)\right] = (iw)^n F(w)$

(b) $f(x), x \in [0, \infty)$，且 $f(x)$，不比間斷連續差，則 $f(x)$ 的傅立業餘弦轉換存在。

4.

同甲組。

5.

$L = 2\pi$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

明顯的，畫出圖以後，可以看出 f(x)爲偶函數，

所以 $b_n = 0, a_0 = \frac{1}{\pi}\int f(x)dx = \frac{\pi^2}{12}$，

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{4}\cos nxdx = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

所以 $f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

(b)

代入 x=0 ，得

$$\frac{\pi^2}{12} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

代入 x=π ，得

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

兩式相加除以 2，得 $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$

6.

(a)同甲組。

(b)計算出矩陣的特徵值：$\lambda = -6, 1, 1, -3$，
根據性質：矩陣行列式的值=特徵值的連乘積＝18。

國立中央大學96學年度碩士班考試入學試題卷 共 2 頁 第 1 頁

所別：土木工程學系碩士班 庚組 科目：工程數學

一、 輔以平面銳角三角形圖示，試明列餘弦定律邊角之關係和其推導過程(16%)。

二、 存在某向量 $\bar{a}$，內含 $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ 個實數元素；試

(一)定義該向量之長度 $|\bar{a}|$，並

(二)詳列偏導數 $\partial|\bar{a}|/\partial a_i$ 之公式(17%)。

三、 已知線性誤差方程組與量測誤差協方差(Covariance)矩陣：

$\mathbf{v}+\mathbf{Ax}=\mathbf{l}$ 與 $\boldsymbol{\Sigma}$，於此矩陣皆無秩虧之虞。經間接觀測最小二乘平差能得向量估計解為 $\hat{\mathbf{x}}$ 及 $\hat{\mathbf{v}}$；試證明雙線性形等於零：

$\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A})\hat{\mathbf{x}}=0$ (17%)。

一 、

三角形 $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$

用內積 $\vec{C}\bullet\vec{C}=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\bullet\left(\vec{A}+\vec{B}\right)$

展開即得餘弦定律 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(\angle C\right)$

二、

$$|\bar{a}|=\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial|\bar{a}|}{a_i}=\frac{a_i}{\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\right)^{1/2}}=\frac{a_i}{|\bar{a}|}$$

三、

這題屬測量部分，解答：略

Part B

4. A 3D surface can be represented in a parametric form as

$$x=f(u,v),\quad y=g(u,v),\quad z=h(u,v) \tag{4-1}$$

In a spherical coordinate system, this becomes

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\varphi \tag{4-2}$$

where ρ is the radius.

a). What is the effective range of φ and θ ? (4%)

b). Find the Jacobian matrix of this spherical surface. (Hint: try to linearize Eq. (4-1) or (4-2) by tracking differentials.) (7%)

c). Also find the normal vector at any given point on this surface. (6%)

5. The Fourier transform, $F(u)$, of a single variable continuous function, $f(x)$ is defined as

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx \tag{5-1}$$

where $j=\sqrt{-1}$; and the inverse Fourier transform is

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}du \tag{5-2}$$

A Gaussain lowpass filter in the frequency domain has the transfer function

$$H(u,v)=Ae^{-(u^2+v^2)/2\delta}$$

Show that the correspobding filter in the spatial domain has the form

$$h(x,y)=A2\pi\delta^2 e^{-2\pi^2\delta^2(x^2+y^2)}$$

(Hint: Treat the variables as continuous and (u^2+v^2) can be replaced by a distance square.) (17%)

6. What does the equation $AX=B$ mean to you? How will you solve the equation? (16%)

4.

(a) 球座標：$\phi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi]$。

(b) Jacobian 行列式= $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\phi$ 。

(c)球表面的法向量極爲球的半徑向量。

5. 公式： $F\left[e^{-at^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$

又 $w = 2\pi u$ ，將之代入，得 $F\left[e^{-at^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\pi^2 u^2}{a}}$

依據題意取 $r^2 = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} H(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{-j2Kr} dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A2\pi\delta^2 e^{-\left(2\pi^2\delta^2\right)r^2} e^{-j2Kr} dr \\ &= 2\pi A\delta^2 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}\pi\delta} e^{-\frac{\pi^2 K^2}{2\pi^2\delta^2}} \\ &= A\delta e^{-\frac{u^2+v^2}{2\delta^2}} \end{aligned}$$

6.

聯立代數方程式，分成無解和有解。

有解的情況下 $X = X_P + N(A)$

無解的情況下，可以求最佳近似解。