國立臺灣大學99學年度碩士班招生考試試題

1. (15%) Find, if possible, an equation of a plane that contains the following given points: (0, 1, 0); (0, 1, 1) and (1, 3, -1).

【提示】參考課本第一章向量代數平面三點式

答案：$2x-y=-1$。

2. (20%) For the given matrix

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Find the eigenvalues.
(b) Find the corresponding eigenvectors.
(c) Are the eigenvectors orthogonal?
(d) If yes, find the orthonomal eigenvectors.

【提示】

(a) 特徵值 $=-2,1,0$

(b) 特徵向量 $=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) 是的

(d) $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. (15%) Use the Stokes' theorem to evaluate

$$\oint_C z^2 e^{x^2} dx + xy^2 dy + \tan^{-1} y dz$$

Where C is the circle given by $x^2+y^2=9$， z=0

【提示】

旋度定理：$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}dA$

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z^2e^{x^2} & xy^2 & \tan^{-1}y\end{vmatrix}=(\cdots)\hat{i}+(\cdots)\hat{j}+y^2\hat{k}$$

又 法向量 $\hat{n}=\hat{k}$，

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S2}(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}dA=\iint_{S2}((\cdots)\hat{i}+(\cdots)\hat{j}+y^2\hat{k})\cdot(\hat{k})dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^3(r^2\sin^2\theta)rdrd\theta=\frac{81\pi}{4}$$

4. (20%) Using boundary conditions

$u(0)=1,\ v(1)=0,$

find the solutions $u(x)$ and $v(x)$, $0\le x\le 1$, to the following systems of ordinary differential equations (ODEs) of (a) and (b)

(a) $\begin{cases}\dfrac{du}{dx}=-2u\\ \dfrac{dv}{dx}=-v\end{cases}$ (b) $\begin{cases}\dfrac{du}{dx}=u-v\\ \dfrac{dv}{dx}=v-u\end{cases}$

【提示】

(a) 題目：$\begin{bmatrix}\dfrac{du}{dx}\\ \dfrac{dv}{dx}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$，解得$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1e^{-2x}\\ c_2e^{-x}\end{bmatrix}$。

代入條件$\begin{bmatrix}u(0)\\ v(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，解得$\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$。

(b) 題目：$\begin{bmatrix} \dfrac{du}{dx} \\ \dfrac{dv}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$，

利用矩陣法解 O.D.E.：

先求特徵值為：0，2，特徵向量為：$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$，

取變換矩陣：$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$令 $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$，代入原方程式，

將方程式對角化，可得: $\begin{bmatrix} \dfrac{ds}{dx} \\ \dfrac{dt}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$，接下來可以解出解出：$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$。

又$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$，得微分方程式的通解：$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_1}{\sqrt{2}} - \dfrac{c_2 e^{2x}}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{c_1}{\sqrt{2}} + \dfrac{c_2 e^{2x}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$。

最後代入條件$\begin{bmatrix} u(0) \\ v(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，解得$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{e^2}{1+e^2} + \dfrac{e^{2x}}{1+e^2} \\ \dfrac{e^2}{1+e^2} - \dfrac{e^{2x}}{1+e^2} \end{bmatrix}$。

5. (30%) Starting each time from initial conditions

$$z(x,0) = \cos x, \qquad -\infty < x < \infty,$$

find the solutions $z(x,t)$ to the following partial differential equations (PDEs) of (a), (b) and (c):

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial t} + 2\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$

(b) $\dfrac{\partial z}{\partial t} + 2\dfrac{\partial z}{\partial x} = z$

(c) $\dfrac{\partial z}{\partial t} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

(d) Draw your solutions to a)-c) at representative times t_0、t_1、t_2.

【提示】

(a) 由輔助方程式：$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{2}=\frac{dz}{0}$，聯立可得$\begin{cases}x-2t=c_1\\z=c_2\end{cases}$，

又$c_2=f(c_1)$，所以$z=f(x-2t)$，

代入初始條件：$z(x,0)=\cos x$，可得：$z=\cos(x-2t)$。

(b) 由輔助方程式：$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{2}=\frac{dz}{1}$，聯立可得$\begin{cases}x-2t=c_1\\z=t+c_2\end{cases}$，

又$c_2=f(c_1)$，所以$z=t+f(x-2t)$，

代入初始條件：$z(x,0)=\cos x$，可得：$z=t+\cos(x-2t)$。

(c) 這是熱傳方程式（這個題，擺在這一小題，顯然有問題，但是不管他）

使用分離變數法，照解，

可以得出通解為：$z(x,t)=\int_o^{\infty}e^{-4\omega t}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$，

代入初始條件可知 $A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos x\cos\omega x dx,\ B(\omega)=0$。

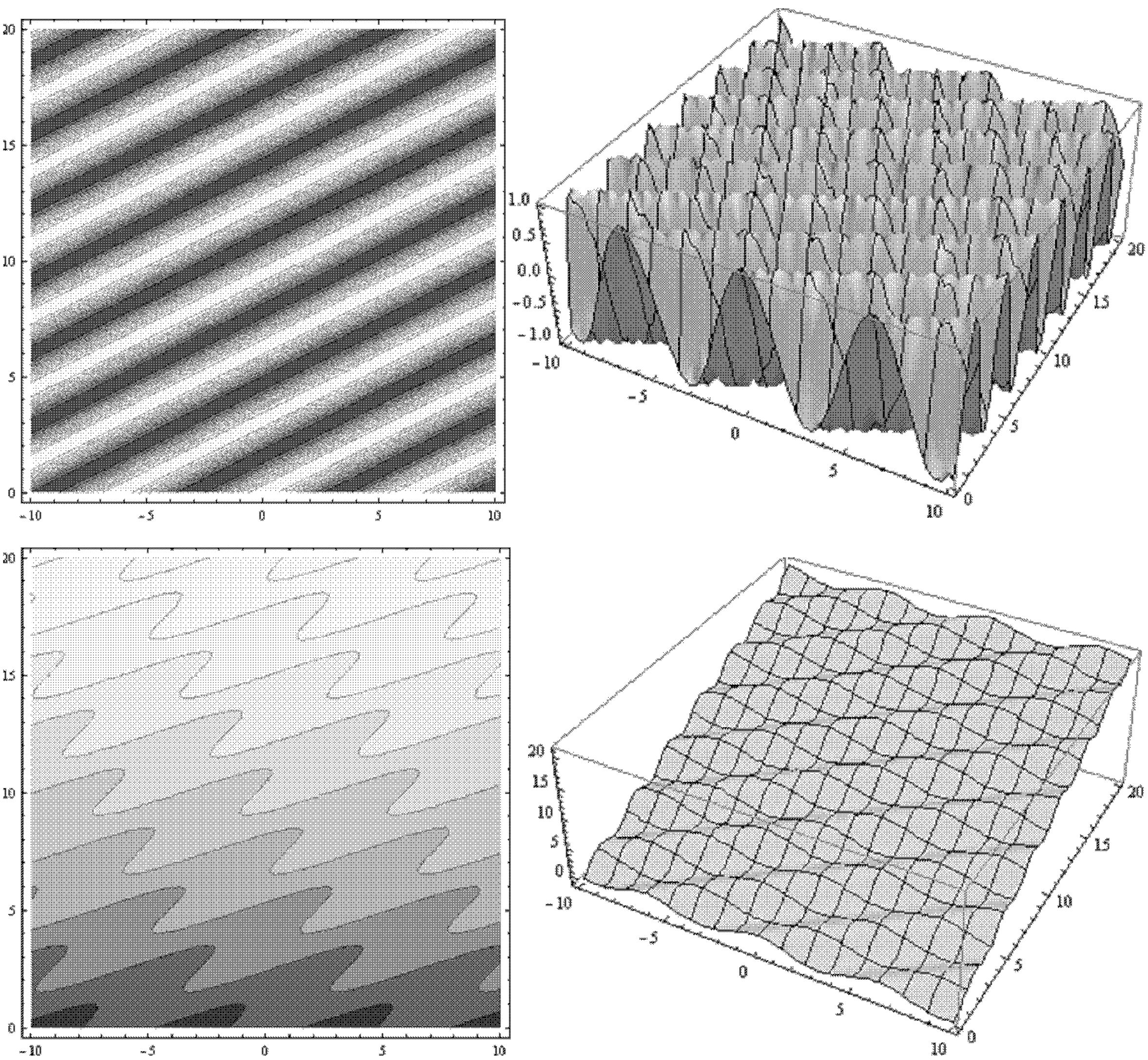
(d) 題目看不清楚。

應該是指不同時間下，將答案作圖。

(a),(b)兩小題的解答，用數學軟體 Mathematica 作圖，

ContourPlot[Cos[x-2t],{x,-10,10},{t,0,20}]
Plot3D[Cos[x-2t],{x,-10,10},{t,0,20}]
ContourPlot[t+Cos[x-2t],{x,-10,10},{t,0,20}]
Plot3D[t+Cos[x-2t],{x,-10,10},{t,0,20}]

可以得出以下 4 個圖形：



國立交通大學 99 學年度碩士班考試入學試題

系所班別：土木工程學系　　組別：土木系甲組一般生

1.(a) Given a dynamic equation $u''(t)+\omega_0^{\,2}u(t)=p(t)$ for $t\geq 0$, with initial conditions $u(0)=u_0; u'(0)=0$ where ω_0 represents the natural frequency of the system. If the frequency response is defined as $\hat{u}(s)=H(s)\hat{p}(s)$, where $\hat{u}(s)$ is the Laplace transform of $u(t)$ and $\hat{p}(s)$ is the Laplace transform of $p(t)$. Please find $H(s)$； (10%)

(b) Find $h(t)$ and $u(t)$ via the inverse Laplace transform. (15%)

【提示】

(a) 將原方程式取拉氏轉換：$s^2U(s)+\omega_0^{\,2}U(s)=P(s)$，

$$U(s)=\frac{1}{s^2+\omega_0^{\,2}}P(s)$$，

所以 $H(s)=\dfrac{1}{s^2+\omega_0^{\,2}}$。

(b) 透過反轉換　，求得：$h(t)=\dfrac{1}{\omega_0}\sin\omega t$，

代入初始條件將原方程式取拉氏轉換：$s^2U(s)-su(0)+\omega_0^{\,2}U(s)=P(s)$，

$$U(s)=\frac{1}{s^2+\omega_0^{\,2}}P(s)+\frac{u_0}{s^2+\omega_0^{\,2}}$$，

透過反轉換　，求得：$u(t)=h(t)*p(t)+u_0\cos\omega_0 t$。

2. Given $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$

(a) Find the eigenvalues and eigenvectors of **A**. (10%)

(b) Let **P** be the eigen-matrix consisting of the eigenvectors of **A**, find $\mathbf{P}^{-1}$ using the method of Gauss-Jordan elimination. (8%)

(c) Find $\mathbf{A}^{23}$. (7%)

【提示】

(a) "特徵值 = "$\{5,-3,-3\}$，

特徵向量 = $\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$。

(b) 轉換矩陣 $P=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\-2 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$，

用高斯消去法，求反矩陣：

$$\left[P:I\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0\\-2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$=\ldots\ldots$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{4}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5}\\0 & 1 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{2}{5}\\0 & 0 & 1 & -\frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & -\frac{2}{15}\end{array}\right]=\left[I:P^{-1}\right]$$

3. Prove

$\nabla\bullet(U\times V) = V\bullet(\nabla\times U) - U\bullet(\nabla\times V)$, where U and V are vector functions of x, y, and z. (10%)

【提示】

使用算子裂分即得。（參考講義第三章）

4. Let $\vec{F}=x^2\vec{i}+2xy\vec{j}$ and $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Calculate the line integral $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ where C is the closed path along the rectangle having vertices (0,0), (0,9), (12,9), (12,0) in the clockwise direction. (10%)

【提示】

使用平面 Green's 定理：$\oint_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_R (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dxdy$ ，

原式$=-\int_0^{12}\int_0^9 2ydydx = -972$ 。（本題為順時針方向求積分，記得取負號）

5. Find the general solutions of the following differential equations:

(a) $x^2y'' + (x^3 - 3x)y' - 2x^2y = 0$ (20%)

(b) $3x^2ye^y dx + x^3e^y(y+1)dy = 0$ (10%)

【提示】

(a) $x^2y'' + (x^3 - 3x)y' - 2x^2y = 0$

建議用級數解法，令弗羅畢尼士級數：$y = \sum_0^\infty c_n x^{n+r}$ ，代入方程式，

解出指標值為：$r = 0,4$ ，

做$r = 0$ ，可一次得兩解。

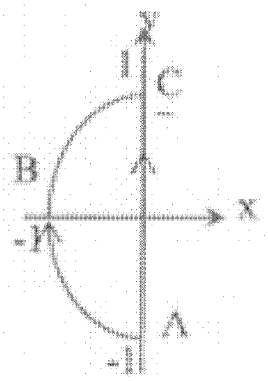
參考答案：$y(x) = C_1x^4\left(1 - x^2/6 + x^4/48 + ...\right) + (1 - x^2/2)C_2$ 。

(b)本題為一階正合微分方程式，故解答為：$x^3ye^y = c$ 。

國立交通大學99學年度碩士班考試入學試題

系所班別：土木工程學系　　組別：土木系丙組一般生

1. Evaluate complex integral: $\int_C |z| dz$, where z=x+iy



(a) along AC. (10%)
(b) along ABC. (15%)

【提示】

(a) 由 AC 路徑，採用直角座標：

$$\int_C |z| dz = \int_C \sqrt{x^2+y^2}\left(dx+idy\right)$$
$$= \int_{-i}^{i} y\left(idy\right) = \left.\frac{iy^2}{2}\right|_{-i}^{i} = 0$$ 。

(b) 由 ABC 路徑，採用極座標：

$$\int_C |z| dz = \int_C |re^{i\theta}|\, d\left(re^{i\theta}\right) \qquad \left(r=1\right)$$
$$= \int_C 1 \bullet ie^{i\theta} d\theta = i\int_{3\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta} d\theta$$ 。
$$= \left. e^{i\theta}\right|_{3\pi/2}^{\pi/2} = 2i$$

2. Solve partial differential equation: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $x>0$ and $y>0$; with boundary conditions:

$u(0,y)=0$, $y>0$; and $u(x,0)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & x>2\end{cases}$ (25%)

【提示】

(1) 本題無法特徵函數展開，要利用分離變數法，先解 x 方向，但是經由這麼多題的經驗，我們知道 y 方向分離變數之後，解出來，必為 sin 函數，而且 y 方向為半無限，所以沒有離散的特徵值，特徵值一定連續。

令 $u(x,y)=X(x)Y(y)$，

$$\frac{X''}{Y}=\frac{-Y''}{Y}=-\lambda,$$

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ Y''-\lambda Y=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}X(0)=0\\ X(\infty)\text{存在}\end{cases},$$

(2)先解能解的 x 方向，

討論後，解出 $\lambda=k^2$，$X=\sin kx, k\in R$。

(3) 將 $\lambda=k^2$ 代入 $Y''-\lambda Y=0$，

解出 $Y=D(k)e^{ky}+C(k)e^{-ky}$，

代入 $u(x,\infty)$=有限$\Rightarrow D(k)=0$，所以答案可以寫成

因此解答 $u(x,y)=\int_0^\infty (C(k)e^{-ky})\sin kxdk$

(4) 代入 x=0 的邊界條件 ，$u(x,0)=f(x)$，

$$f(x)=\int_0^\infty C(k)\sin kxdk,$$

$$\begin{aligned}C(k)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin kxdy\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^1 1\bullet\sin kxdy=\frac{2}{k\pi}\left(1-\cos k\right)\end{aligned}。$$

3. Show that $\phi = C\cosh x \sin y$ is a permissible potential function (5%) and its corresponding stream function that is a conjugate harmonic function corresponding to the potential function. (5%)

【提示】

(a) $\nabla^2\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$，所以$\phi$為一個 potential function。

(b) 解出共軛函數：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = C\sinh x \sin y \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = -C\cosh x \cos y \end{cases},$$

聯立可解得：$\varphi = -C\sinh x \cos y + D, (D \in R)$

4. A second-order ordinary differential equation (ODE) is given as $x^2y''+(x^2+x)y'-y=0$, $y=y(x)$. Solve by power series; please show the indicial equation (5%) and the corresponding solution (10%).

【提示】利用夫羅畢尼士級數解法

這題題目和講義 15 章的問題一模一樣，請參閱。

5. A function is defined as $f(t)=e^t, 0 \le t \le \pi$ and $f(t)=e^{-t}$, $-\pi \le t \le 0$ with a period of 2π.

(1) Is the function even or odd? (2%)

(2) Find its Fouries series (13%)

【提示】

(1) 偶函數。

(2) 因為$T=2\pi$，所以傅立業級數：$f(t) = a_{0+}\sum_{1}^{\infty} a_n \cos n\tau$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^t dt = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi}-1\right)$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^t \cos nt\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\left[\int_0^{\pi} e^t e^{int}\,dt\right] = \frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\left[\int_0^{\pi} e^{(1+in)t}\,dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\left[\left.\frac{e^{(1+in)t}}{1+in}\right|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\left(1+n^2\right)\pi}\operatorname{Re}\left[(1+in)\left(e^{(1+in)\pi}-1\right)\right] \\
&= \frac{2}{\left(1+n^2\right)\pi}\left(e^{\pi}(-1)^n - 1\right)
\end{aligned}
$$

6. A forced oscillation system is governed by $y''+9y=f(t)$.

(1) What is the natural frequency of the system? (2%)

(2) What is the homogeneous solution? (3%)

(3) If the driving force is given by the function of problem 5, state the method and procedure to find the particular solution. [Note: The complete expression for the particular solution is **not** required.] (5%)

【提示】

(1) 自然頻率=3。

(2) 齊性解： $y(t)=c_1\cos 3t + c_2\sin 3t$ 。

(3) 令解答 $y(t)=\alpha_{0+}\sum_1^{\infty}\alpha_n\cos n\tau$ ，

將解答和 $f(t)=a_{0+}\sum_1^{\infty}a_n\cos n\tau$ ，代入方程式中，

解出係數 α_0,α_n ，即得方程式的特別解。

(1)

(a) Determine $a(x)$ so that by a change of variable $y=a(x)u(x)$ then the equation

$$y''(x)+2xy'(x)+y(x)=0$$

becomes

$$u''(x)+r(x)u(x)=0.$$

What is $r(x)$? (15%)

(b) Solve $xy''(x)-y'(x)-4x^3y(x)=0$ by setting $x=t^{1/2}$ (15%)

【提示】

(a) 採用因變數轉換，令 $y=a(x)u(x)$，

應用萊布尼茲微分公式，代入原 ODE，可得：

$au''+2(a'+xa)u'+(a''+2xa'+a)u=0$，

依據題意，將上式和 $u''+ru=0$ 做比較，知 $a'+xa=0$，

解得：$a=e^{-x^2/2}$。

又 $r(x)=a''+2xa'+a=-x^2e^{-x^2/2}$。

(b) 採用自變數轉換，令 $x=t^{1/2}, t=x^2$，

應用鍊鎖律公式，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=2x\dfrac{dy}{dt}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(2x\frac{dy}{dt}\right)=2\frac{dy}{dt}+2x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right),$$

$$=2\frac{dy}{dt}+2x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}=2\frac{dy}{dt}+4x^2\frac{d^2y}{dt^2}$$

將以上兩式，代入原 ODE，可得：$\frac{d^2y}{dt^2}-y=0$，

解得：$y=c_1e^t+c_2e^{-t}=c_1e^{x^2}+c_2e^{-x^2}$ 。

(2)

(a) Evaluate the line integral

$$\int_c (x+y)dy$$

where c is the ellipse $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ clockwise. (10%)

(b) Evaluate $curl(\mathbf{u}\ div\mathbf{u})$ where $\mathbf{u}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$. (10%)

【提示】

(a) 使用平面 Green's 定理：$\oint_C f(x,y)dx+g(x,y)dy=\iint_R (\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy$，

原式$=\iint_R 1dxdy=\pi ab$ 。

(b) $\nabla\times(\vec{u}\nabla\cdot\vec{u})=\nabla\times(3\vec{u})=3\nabla\times(xi+yj+zk)=0$ 。

(3)

(a) Find the derivative of $f=xyz$ at the point $(1,3,2)$ in the direction of the vector $2\mathbf{i}-\mathbf{k}$. (10%)

(b) What is the maximum possible directional derivative of $f=xyz$ at the point $(1,3,2)$ and what is its direction? (10%)

【提示】

(a) $\nabla(xyz) = yzi + xzj + xyk$ ，@(x,y,z)=(1,3,2)

梯度向量= $6i + 2j + 3k$ ，

方向導數： $\frac{df}{ds}\nabla f \cdot \hat{u} = (6i + 2j + 3k)\cdot\left(\frac{2i - k}{\sqrt{5}}\right) = \frac{9}{\sqrt{5}}$ 。

(b) 增加最快的方向： $6i + 2j + 3k$ 。

(4)

Bessel's equation of order zero is

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0$$

One of the solution is

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - + ..$$

The second solution exists of the form

$$J_0(x)\ln x + Ax^2 + Bx^4 + \ldots$$

Find the two coefficients A and B (15%)

【提示】

依據題意將第二個解答： $J_0(x)\ln x + Ax^2 + Bx^4 + \ldots.$ 代入方程式，

並利用 $x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$ ，

可得 $(-1 + 4A])x^2 + (\frac{1}{8} + A + 16B)x^4 + O[x]^5 = 0$ ，

解得：

$A \to \frac{1}{4}, B \to -\frac{3}{128}$ 。

(5)

(a) Find values of a, b and c so that

$$f(z) = -x^2 + xy + y^2 + i(ax^2 + bxy + cy^2)$$

is entire. (5%)

(b) Evaluate

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{e^{1/z}\sin z}{(e^z - 1)(z-2)}dz \qquad (10\%)$$

【提示】

(a) $f(z) = u + iv$，

$f(z)$ 為全函數，所以滿足歌西-里曼條件：

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -2x + 3y = bx + 2cy \Rightarrow b = -2, c = 3/2$，

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x - 2y = 2ax + by \Rightarrow a = -1/2$。

(b) 根據留數定理

原式＝$2\pi i \times R(2) = 2\pi i \times \left(\frac{e^{1/2}\sin 2}{e^2 - 1}\right)$。

國立中央大學99學年度碩士班考試入學試題卷

所別：土木工程學系碩士班 結構組(一般生)

1) 試求解下列微分方程：

$$xy''-y'-(3+x)x^2e^x=0\ ,\quad y(0)=0\ ,\quad y(1)=2e$$

(20分)

【提示】

將方程式整理為：$x^2y''-xy'=(3x^3+x^4)e^x$，是以本題為非齊性的歌西方程式。

先解齊性解：$y=c_1+c_2x^2$，

再用公式法（變換參數法）解特解：

$$\begin{aligned}y_p&=-\phi_1\int\frac{r\phi_2}{w(\phi_1,\phi_2)}dx+\phi_2\int\frac{r\phi_1}{w(\phi_1,\phi_2)}dx\\&=-\int\frac{(3x^3+x^4)e^xx^2}{2x}dx+x^2\int\frac{(3x^3+x^4)e^x}{2x}dx\text{（使用分部積分法）}\\&=x^2e^x\end{aligned}$$

2) 若 $x'=\frac{dx}{dt}$，$y'=\frac{dy}{dt}$ 且

$$x'-2x-3y=2e^{2t}\ ,\quad x(0)=-\frac{2}{3}$$

$$-x+y'-4y=3e^{2t}\ ,\quad y(0)=\frac{1}{3}$$

試求 $x(\frac{1}{2})-y(\frac{1}{2})=?$

(20分)

【提示】

本題使用拉普拉斯變換法：

$$x'[t]=2e^{2t}+2x[t]+3y[t],\ y'[t]=3e^{2t}+x[t]+4y[t]$$

$$\frac{2}{3}+sX[s]=\frac{2}{-2+s}+2X[s]+3Y[s],-\frac{1}{3}+sY[s]=\frac{3}{-2+s}+X[s]+4Y[s]$$

$$X[s]\to -\frac{-19+2s}{3(-5+s)(-2+s)},Y[s]\to -\frac{-4-s}{3(-5+s)(-2+s)}$$

$$x[t]\to \frac{1}{3}(-5e^{2t}+3e^{5t}),y[t]\to \frac{1}{3}(-2e^{2t}+3e^{5t})$$

最後求 $x(1/2)-y(1/2)=-e$

3) 球面 S 的方程為 $x^2+y^2+z^2=4$，向量場 $\underset{\sim}{F}$ 的表達式為 $\underset{\sim}{F}=(x^3-y^3)\vec{i}+(z+y^3)\vec{j}+(e^x+z^3)\vec{k}$。請計算球面積分 $\iint_S \underset{\sim}{F}\cdot\underset{\sim}{n}\,dA$，其中 dA 代表球面 S 上的面積微元素，而 $\underset{\sim}{n}$ 則代表球面 S 上的單位法向量。 (30分)

【提示】

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{z}}=3\left(x^2+y^2+z^2\right),$$

依據高斯散度定理：

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}dA=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})dv=\iiint_V 3\left(x^2+y^2+z^2\right)dv,$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2}3r^2r^2\sin\theta d\theta d\phi=3\frac{32}{5}(2)(2\pi)=\frac{324}{5}\pi。$$

4) 考慮矩陣

$$A_{3\times3}=\begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

參考用

其中 $1/\sqrt{2}$ 代表 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，餘類推。

請計算 A^{-1} 和 rank (A)。 (30分)

注意答案中不可以出現小數點，但可以有數字的平方根符号

【提示】

A 明顯為一正交矩陣，

所以 A 的秩=3，

$A^{-1}=A^{T}$ 。

國立中央大學99學年度碩士班考試入學試題卷

所別：土木工程學系碩士班 大地組(一般生)

1) 考慮微分方程 $\frac{dy}{dx}+a(x)y=f(x)$，其中 $a(x)=\frac{2}{x}$，$f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$。設此方程的解滿足條件 $y(\pi)=\frac{1}{\pi^2}$，亦即，當 $x=\pi$ 時 $y=\frac{1}{\pi^2}$。請計算出 $y(x)$。

(25分)

【提示】本題為一階線性常微分方程式，使用公式法：

$$e^{\int a dx}y=\int e^{\int a dx}f dx+c$$

$$x^2y=\int x^2\frac{\sin x}{x^2}\Rightarrow y=\frac{-\cos x}{x^2}+\frac{c}{x^2}$$

代入初始條件 $y(\pi)=\frac{1}{\pi^2}$，可以解出 c=0，

故特解為：$y=\frac{-\cos x}{x^2}$。

2) 微分方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+y=\delta(t-2)$ 的初始條件為 $y(0)=y'(0)=0$。符號 $\delta(t-2)$ 代表 Dirac delta 函數。請用 Laplace transform 方法求 $y(t)$。

(25分)

【提示】

用拉普拉斯變換求解：先取轉換

$$s^2Y(s)+Y(s)=e^{-2s} \Rightarrow Y(s)=\frac{e^{-2s}}{s^2+1}$$，

再取反轉換：

$$y(t)=\sin(t-2)u(t-2)$$。

3) 考慮微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}-9y=12e^{3x}$。若其解滿足初始條件 $y(0)=y'(0)=0$，請計算出 $y(2)$ 的值，亦即，在 $x=2$ 時的 y 值。

(25分)

【提示】使用拉普拉斯變換法：

$$-9Y[s]+s^2Y[s]=\frac{12}{-3+s}$$

$$Y[s]\to\frac{12}{(-3+s)^2(3+s)}$$

取反轉換：$y[x]\to\frac{1}{3}e^{-3x}(1-e^{6x}+6e^{6x}x)$。

4) 請証明以下的微分式 (differential form) 不是 exact differential form：

參考

$$\sin(xy)\,dx+x^3\,dy=0$$

(25分)

【提示】

$\frac{\partial N}{\partial x}\neq\frac{\partial M}{\partial y}$，所以不是正合微分方程式。

國立中興大學99學年度碩士班招生考試試題

系所：土木工程學系甲組

1. 求下列微分方程：

（a） $(y-1)dx+(x-3)dy=0.\quad y(0)=\dfrac{2}{3}$ （10 分）

（b） $(1+2x^2+4xy)dx+2dy=0.$ （10 分）

【提示】(a)使用分離變數法得： $\ln(3-x)+\ln(1-y)=c$ ，

代入初始條件得 $c=0$ 。

(b)本題為一階線性常微分方程，整理可得： $\dfrac{dy}{dx}+2xy=-x^2-\dfrac{1}{2}$ ，

使用公式解 $e^{\int p(x)dx}y=\int e^{\int p(x)dx}r(x)dx+c$ ，得： $y=-\dfrac{x}{2}+ce^{-x^2}$ 。

2. （a）求下列矩陣之特徵值（eigenvalues）及特徵向量（eigenvectors）。（10 分）

$$\begin{bmatrix}6 & 10 & 6\\0 & 8 & 12\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

（b） $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 。求其極值（principal values）與主軸方向（principal directions）。 （10 分）

【提示】

(a) 本題為三角矩陣，所以對角線元素，即為特徵值=8,6,2。

對應的特徵向量分別為： $\begin{bmatrix}5\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\-4\\2\end{bmatrix}$ 。

(b) 特徵值=1,3，對應的特徵向量分別為：$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$。

3. （a）求平面 $x+2y+z=3$ 和平面 $2x-y+3z=-4$ 之夾角。（10 分）

（b）一力 $\mathbf{P}=3\vec{i}-6\vec{k}$ N，其作用線（line of action）通過點(1, 8, 1)。求此力對點(4, 6, -1)之力矩(moment)為何？註：(unit of length = m)（10 分）

【提示】

(a) 兩平面的法向量分別為：(1,2,1)，(2,-1,3)，

根據向量內積，可計算出夾角：$\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right)$。

(b) 位移向量：$\vec{r}=(1,8,1)-(4,6,-1)=(-3,2,2)$，

力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{P}=(-12,-12,-6)\quad(N-m)$。

4. 求下列偏微分方程之特解。(20 分)

P. D. E： $u_{xx}+u_{yy}=0,\ \ 0<x<\pi,\ \ 0<y<\mathbf{b}$

B. C： $u(0,y)=u(\pi,y)=0,\quad 0<y<\mathbf{b}$
$u(x,\mathbf{b})=0,\ \ u(x,0)=3\sin x,\ \ 0<x<\pi$

【提示】

本題為拉普拉斯方程式，使用特徵函數展開法（參考講義第 24 章）

解答為：$u(x,y)=\sum_{1}^{\infty}c_n\sinh ny\sin nx$，

代入初始條件：$u(x,0)=3\sin x$，

可得：$c_1=\dfrac{3}{\sinh b},c_2=0=c_3=c_4=\ldots$。

5. 試證複數函數 $f(z)=(z+1)^2$， $z=x+iy$ 之實數及虛數部分之函數 ($u(x,y)$ and $v(x,y)$)均為調和函數(harmonic function)。(20 分)

【提示】

$f(z)=u+iv=\left(1++2x+x^2-y^2\right)+i\left(2y+2xy\right)$ ，

驗證 $\nabla^2 u=\nabla^2 v=0$ 。即可以得證。

國立中興大學99學年度碩士班招生考試試題

系所：土木工程學系乙組

1. Interpret the physical meanings of Fourier series and Fourier transform, respectively. (10%)

【提示】

2. Solve the following partial differential equation and discuss the corresponding eigenvalues and eigenfunctions:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-G \qquad \text{(G: the acceleration of gravity)}$$

with boundary conditions: $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$;

and initial conditions: $u(x, 0) = f(x)$ and $u_t(x, 0) = 0$.

【提示】

分離變數法，因為題目要討論特徵值，和特徵函數。

（注意本題要分離的方程式為齊次方程式，不要考慮重力 G）

，請參考講義第 22 章。

3. Evaluate

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)(x^2+3)} \qquad (10\%)$$

【提示】

使用留數定理：

原式＝ $2\pi i\times\left(\frac{R(1)}{2}+R(3i)\right)=2\pi i\times\left(\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{-1}{8}+\frac{i}{8\sqrt{3}}\right)\right)=-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ 。

4. Solve the following equations.

(a) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = -y'(0) = 1$.

(b) $y(t) = t + \int_0^t y(\alpha)\sin(t-\alpha)\,d\alpha.$ (20%)

【提示】

(a) 使用拉普拉斯變換：

$$2y[t] + 2y'[t] + y''[t] == 0$$
$$1 - s + 2Y[s] + s^2 Y[s] + 2(-1 + sY[s]) == 0$$
$$Y[s] \to \frac{1+s}{2+2s+s^2}$$
$$y[t] \to e^{-t}Cos[t]$$

(b) 使用拉普拉斯變換：

$$y[t] == t + \int_0^t Sin[t-\tau]y[\tau]d\tau$$
$$Y[s] == \frac{1}{s^2} + \frac{Y[s]}{1+s^2}$$
$$Y[s] \to \frac{1+s^2}{s^4}$$
$$y[t] \to t + \frac{t^3}{6}$$

5. Know that a matrix A, then to

(a) evaluate the inverse (if it exits), and (b) find a basis of eigenvectors and diagonalize. (20%)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

【提示】

反矩陣：$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

特徵值 $=\{2,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$,特徵向量 $=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

轉換矩陣 $P=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

對角化 $P^{-1}AP=I$ 。

6. (a) Describe the divergence theorem of Gauss.

(b) Evaluate $I=\iint_S 3xdydz-x^2ydzdx+x^2zdxdy$, where S is the surface of $x^2+y^2+z^2=1$. (15%)

【提示】

(a) 空間中一分段平滑(piecewise smooth)可定向的封閉曲面 S，包含一個密閉空間區域 V， $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\hat{j}+R(x,y,z)\hat{k}$ ，為在此曲面與區域中存在連續之一階偏導數的向量函數，則有

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})dv$$

$$\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$ 。

(b) $\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} + \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{y}} + \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{z}} = 3$ ，

使用高斯散度定理：$\oiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dv$ ，

得出答案為：4π 。

國立中興大學99學年度碩士班招生考試試題

系所：土木工程學系丙組

1. Please find the set of differential equations
   $2\ dy/dx - 3y + x = 4\ e^t$
   $y + 2dx/dt - 3x = 0$ (15%)

【提示】

題目有問題，第一個方程式中的 $\dfrac{dy}{dx}$，應該修正為 $\dfrac{dy}{dt}$。

根據修正後的結果：$2x'[t] == 3x[t] - y[t]2y'[t] == 4e^t - x[t] + 3y[t]$，

使用矩陣法去求解：

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

，特徵值 $=\{2,1\}$

特徵向量 $= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

轉換矩陣 $P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

令 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$，代入方程式，得 $\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4e^t \end{bmatrix}$，

解出 u,v 後，又 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$，可以解出：

$$x[t] \to e^t + e^t t + \frac{1}{2} e^t C[1] + \frac{1}{2} e^{2t} C[1] + \frac{1}{2} e^t C[2] - \frac{1}{2} e^{2t} C[2]$$

$$y[t] \to -e^t + e^t t + \frac{1}{2} e^t C[1] - \frac{1}{2} e^{2t} C[1] + \frac{1}{2} e^t C[2] + \frac{1}{2} e^{2t} C[2]$$

2. Plane C crosses the intersection of Plan A (x+2y-3z=0) and Plan B (x-y+z=1). In addition, Point A (1,2,1) is in Plane C. Please determine plane C. (15%)

【提示】

先找 A，B 兩平面的交線：$\frac{x-2/3}{1}=\frac{y+1/3}{4}=\frac{z}{3}$ ，

此交線的方向向量為（1,4,3），又線外一點為,(1,2,1)，

求過一線和線外一點的平面方程式：

（先找此平面的法向量，再用$(\vec{r}-\vec{r}_9)\cdot\vec{N}=0$ ）

得出此平面：3x-z=2。

3. Please theory of residues to find the value of $\int_0^{\infty}\left[\frac{2x^2-3}{x^4+5x^2+4}\right]dx$ (15%)

【提示】應用留數定理：

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x^2-3}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{1}{2}\left(2\pi i\times\left[R(2i)+R(i)\right]\right)$$

$$=\pi i\times\left[R(2i)+R(i)\right]=\pi i\times\left[\frac{-11}{4i(-3)}+\frac{-5}{3(2i)}\right]=\frac{\pi}{12}$$ 。

4. Use the Laplace Transformation to solve the boundary value problem
y''+2y'+y=0, y(0)=0, y(1)=2 (15%)

【提示】

令 $y'(0)=c$

$y[t]+2y'[t]+y''[t]=0$

取拉氏轉換

$-c+Y[s]+2sY[s]+s^2Y[s]=0$

$Y[s]\to\frac{c}{(1+s)^2}$

取反轉換： $y[t]\to ce^{-t}t$

代入$y(1)=2$ ，可得 $c=2e\Rightarrow y(t)=2te^{-t+1}$

6. For an isotropic, homogeneous elastic body in plane strain with no body forces, the stress components σ_{ij} (i,j=x,y) satisfy the following relation

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=0$$

Try to show that (1) the stress components can be expressed in terms of one stress function Φ and (2) this stress function is biharmonic. (20%)

【提示】

令 $\sigma_{xy}=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x\partial y}$

代入 $\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}=0\Rightarrow\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}=-\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\Rightarrow\dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial^2 y}\Rightarrow\sigma_{xx}=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial^2 y}$，

代入 $\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=0\Rightarrow\dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=-\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}\Rightarrow\dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2\partial y}\Rightarrow\sigma_{yy}=\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial^2 x}$，

將以上兩式代入 $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)=0$，

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\, y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\, x^2}\right)=0\Rightarrow\nabla^4\Phi=0$$，

故得證。