工程數學題公式手冊

鄒傑

重點 1 純量三重積(scalar tripple product)

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k})\cdot\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}=[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]$$ 。

純量三量積 $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ 具有如下之性質：

(1) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=-\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})=\cdots$

(2) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=|\vec{A}||\vec{B}\times\vec{C}|\cos\theta$，其中 $|\vec{B}\times\vec{C}|$ 可以解釋爲 $\vec{B}$ 與 $\vec{C}$ 所張開之平行四邊形面積，$|\vec{A}|\cos\theta$：事實上是平行六面體之高，因此 $[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]$ 可以解釋爲平行六面體體積。

(3)若 $[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]=0$，表 $\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}$ 共面。

重點 2 向量三重積(vector tripple product)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$$

有關向量的一些恆等式的問題，綜合如下：

❄ 量四量積(scalar biquadratic product)：

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

❄ 向量四量積(vector biquadratic product)：

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{D}]\vec{C}-[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]\vec{D}=[\vec{A}\,\vec{C}\,\vec{D}]\vec{B}-[\vec{A}\,\vec{C}\,\vec{D}]\vec{A}$$

❄ 賈可伯恆等式(Jacobi Identity)：

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$$

❄ $\vec{A}\times(\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})) = (\vec{A}\cdot\vec{A})(\vec{B}\times\vec{A})$

❄ $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot[(\vec{B}\times\vec{C})\times(\vec{C}\times\vec{A})] = [\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]^2$

（請注意證明之作法）

重點 3 梯度與方向導數

純量場$\phi(x,y,z)$，沿著特定方向$\hat{u}$之變化率，稱之為方向導數(directional derivative)：

$$\left.\frac{d\phi}{ds}\right|_{\hat{u}} = \nabla\phi\cdot\hat{u} \ ,$$

其中$\hat{u}$為給定之單位向量，$\nabla\phi$為純量場$\phi(x,y,z)$之梯度(gradient)，

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial z}k \ 。$$

梯度的性質：

❄ 物理應用上，$\nabla\phi$之方向表純量場$\phi(x,y,z)$變化最快的方向，而$|\nabla\phi|$之大小為純量場方向導數之最大值。

❄ 幾何應用上，$\nabla\phi$之方向表等位面(level surface) $\phi(x,y,z)=c$之法向量。

重點 4 與路徑無關之線積分

【定理】 Ω為一單連通區域，C為區域D中任意一條分段平滑之曲線，對向量函數$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\hat{i} + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\hat{k}$而言，若其中之$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在$\Omega$中為一次可微分函數，則線積分$\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$與積分路徑無關(independent of path)之充要條件為：存在一純量函數$\phi(x,y,z)$且$\vec{F} = -\nabla\phi$；而且線積分的值為

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(\text{起點}) - \phi(\text{終點}) \ 。$$

【定理】線積分 $\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ 與積分路徑無關，若且唯若 $\nabla\times\vec{F}=0$ 。

❋ $\nabla\times\vec{F}=0$ ，表示 $\vec{F}(x,y,z)$ 爲非旋轉(irrotational)場。

重點 5 平面 Green's theorem

【定理】 設 R 爲空間中一之封閉區域，C 爲一分段平滑(piecewise smooth)之封閉曲線且 C 爲 R 之邊界，函數 f(x,y),g(x,y)在 R 及 C 上均有定義且存在一階偏導數，則：

$$\oint_C f(x,y)dx+g(x,y)dy=\iint_R\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$$ 。

其中曲線 C 爲逆時針方向。

❋注意事項：

(1) 封閉曲線 C，
(2) f(x,y)，g(x,y)在區域中存在連續之一階偏導數，
(3) 曲線 C 爲逆時針方向。

【題型】(1)計算線積分與面積分，驗證 Green's 定理。(2) 特別注意奇異點的問題。

重點 6 Stokes' theorem

【定理】 空間中一分段平滑的曲面 S，封閉曲線 C 爲 S 之邊界，向量函數 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)\hat{k}$ ，在此曲面與邊界上存在連續之一階偏導數，則有：

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}dsv$$

$$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$ 。

其中 $\hat{n}$ 爲 S 之單位法向量，其方向爲曲線 C 右手定則之方向。

❋注意事項：

(1) 封閉曲線 C，

(2) $\vec{F}(\vec{r})$ 在區域中存在連續之一階偏導數，

(3) 曲線 C 與 $\hat{n}$ ，遵守右手定則之方向。

【題型】(1)計算線積分與面積分，驗證 Stokes' 定理。(2）求線積分的問題轉換成面積分來計算。

重點 7 Gauss divergence theorem

【定理】空間中一分段平滑(piecewise smooth)可定向的封閉曲面 S，S 為空間區域 V 之表面，向量函數 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{i}+Q(x,y,z)\,j+R(x,y,z)\hat{k}$，在此曲面與區域中存在連續之一階偏導數，則有

$$\oint\!\!\oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}ds=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})dv$$

$$\oint\!\!\oint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$ 。 (直角座標系)

其中 $\hat{n}$ 為指向區域 V 外部之單位法向量。

❈注意事項：

(1) S：封閉曲面 S，

(2) $\vec{F}(\vec{r})$ 在區域中存在連續之一階偏導數，

(3) $\hat{n}$ 為指向區域 V 外部之單位法向量。

【題型】(1)計算體積分與面積分，驗證 Gauss 定理。求面積分的問題轉換成體積分來計算。(3)注意奇異點的問題。

重點 8 特徵值與特徵向量

矩陣 $A\in R^{n\times n}$，若 $Ax=\lambda x$ 或 $(A-\lambda I)x=0$，其中 λ 為一常數，則 λ 稱之為矩陣 A 之特徵值(eigenvalue)，x 稱之為特徵向量(eigenvector)。

因特徵向量 $x\neq 0$(**Why !!**)，故

$$(A-\lambda I)x=0\Rightarrow |A-\lambda I|=\phi(\lambda)=0$$ ，

$\phi(\lambda)$ =0 稱為矩陣 A 之特徵方程式(characteristic equation)。特徵方程式之根 λ，即為特徵值，代入 $(A-\lambda I)x=0$ 之 x，即為特徵向量。

【定理】為特徵方程式的 m 重根，則 λ 至少對應一個，至多對應 m 個特徵向量，即

$1 \le n - r(A\text{-}\lambda\ I) \le n\text{-}m$ 。

（本定理亦可推論出λ對應 m 個特徵向量，則λ至少為 m 重根。）

【定理】n 階方陣 A，其特徵值為$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$（可能有重根），則

(1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = t(A)$ ，

(2) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$ 。

【定理】矩陣 $A \in R^{n\times n}$ ，若 $Ax = \lambda x$

矩陣	特徵值	特徵向量
A	λ	**X**
$A^m, m \in N$	λ^m	**X**
A^{-1}	$1/\lambda$	**X**
e^A	e^λ	**X**
kA	$k\lambda$	**X**
$A \pm kI$	$\lambda \pm k$	**X**

【定理】

特殊矩陣之性質				
名稱	定義	λ	x	其他
對稱矩陣	$A^T = A$	$\lambda \in R$ 。(P)	對應不同λ之 x 必正交(P)	具有恒性。
厄米特矩陣	$A^* = A$			
反對稱矩陣	$A^T = -A$	λ=0，或純虛數。	存在一組互相正交之 x。	
反厄米特矩陣	$A^* = -A$			
正交矩陣	$A^T = A^{-1}$	$\|\lambda\| = 1$。(P)	存在一組互相正交之 x。	$\|A\| = \pm 1$，A 之行(列)向量為 orthonormal set。
么正矩陣	$A^* = A^{-1}$			
正規矩陣	$AA^T = A^T A$		存在一組互相正交之 x。	
正規矩陣	$AA^* = A^* A$			

❋(P)：表示注意證明的方法。

重點 9 對角化

對角化之五步驟：

(1) 計算λ，

(2) 求出$x^1, x^2, \cdots x^n$ ，

(3) $P = [x^1 x^2 \cdots x^n]$ ，

(4) P^{-1} ，

(5) $P^{-1}AP = D$ 。

【定理】$A \in R^{n\times n}$ ，A 爲可對角化之充要條件爲 A 具有 n 個線性獨立之特徵向量 。
（ A 的特徵值相異，僅爲可對角化之充分條件。）

實對稱矩陣之對角化

【定理】對於對稱方陣 A，必存在一正交矩陣 P，可將 A 經由相似變換而得到對角矩陣 D。意即：

$$P^T AP = P^{-1}AP = D \text{ 。}$$

【觀念說明】

- 對一般矩陣而言，A不一定具有n個線性獨立之特徵向量，但正則矩陣、厄米特矩陣、實對稱矩陣、單式矩陣、正交矩陣即使特徵值相同，仍可求出n個線性獨立之特徵向量，故仍可對角化。
- 對稱矩陣中對應不同特徵值之特徵向量必互相正交。
- 對稱矩陣之特徵向量不一定互相正交。
- 對稱矩陣必存在n個必互相正交之特徵向量，可將正交對角化。

對角化的目的：

一般而言對角化的目的是爲了化簡線性映射的問題，在工程數學中，可應用至

(1) 矩陣函數

【定理】若 $A \in C^{nn}$ ，A 可對角化，即 $A = PDP^{-1}$ ，則矩陣函數

$$f(A) = P\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & f(\lambda_i) & \\ & & \ddots \end{bmatrix}P^{-1}$$

，其中 f(x)爲多項式、三角函數、對數函數、有理函數、根式與對數函數。

(2) 二次式

(3) 積分：$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x,Ax)}dx_1dx_2\cdots dx_n = \dfrac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{|A|}$ 。

(4) 解聯立微分方程組。

重點 10　複變函數的公式與定理

【定理】 複變函數 $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ ，若 $u(x,y), v(x,y) \in C^1$ ，則 *f(z)*在此點上可微分之充要條件稱爲哥西里－曼條件，如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \text{，（直角座標系）；}$$

- 複變函數 $w = f(z) = u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ ，若 $u(x,y), v(x,y) \in C^1$ ，則

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases} \text{，（極座標系）。}$$

（哥西證明了定理的充份性，里曼證明了定理之必要性。）

【定理】C 爲一單連封閉曲線，*f(z)*在 C 上及其內部爲解析，則恆有 $\oint_c f(z)dz = 0$.稱之爲哥西積分定理。

【定理】C 爲一單連封閉曲線，*f(z)*在 C 上爲解析，在 C 之內部除了極點 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 之外，全爲解析，則恆有

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i[R(z_1)+R(z_2)+\cdots+R(z_k)].$$

公式：

(1) $\begin{cases} \sin i\theta = i\sinh\theta, \quad \sinh i\theta = i\sin\theta, \\ \cos i\theta = \cosh\theta, \; \cosh i\theta = \cos\theta. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \cosh z = \dfrac{e^z+e^{-z}}{2}, \\ \sinh z = \dfrac{e^z-e^{-z}}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \\ \sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \end{cases}$

(3) 對數 ： $\ln z = \ln|z| + i(\theta+2n\pi)$ 。

(4) 冪函數： $z^w = e^{w\ln z}$

(5)【留數公式】

(a) 一階(簡單)極點： $f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)} \Rightarrow \begin{cases} \textbf{(1)}\ R(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z), \\ \textbf{(2)}\ R(z_0)=\dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \end{cases}$,

(b) m 階極點： $R(z_0)=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$ 。

重點 11　矩陣在常微分方程式的應用

求解聯立微分方程式有四個方法：

(1) 矩陣法

(2) 矩陣函數法

(3) 拉普拉斯變換法

(4) 代數法

❋ 聯立微分方程組的問題，考試極為重要，同學務必確實瞭解。

重點 12　一階常微分方程式

$f(x,y,y')=c$ ，　　　　(隱函數表示法)

$y'=f(x,y)$ ，　　　　(顯函數表示法)

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 。　　(全微分表示法)

一階常微分方程式，以實用的角度予以區分，可分成以下四類：

(1) 變數分離型，

(2) 正合型與積分因子，

(3) 一階線性常微分，

(4) 完全微分型。

（一）分離變數型

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=p(x)q(y)\Rightarrow\frac{dy}{q(y)}=p(x)dx\ ,$$

$$\int\frac{dy}{q(y)}=\int p(x)dx+c\ 。$$

但對於有些方程式雖然不能如上式般直接予以變數分離，但是經由適當的變數轉換也可以分離變數，例如：

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=g(ax+by)\ ,$$

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\frac{2xy}{x^2-y^2},\ \frac{y^3-x^3}{(x+y)^3},\cdots,etc.$$

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0\begin{cases}(1)\ \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2},\\(2)\ \dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2},\end{cases}$$

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0,$$

$$yf(x^my^n)dx+xg(x^my^n)dy=0,\ (m,n\in R)$$

$\cdots\cdots\cdots,\ etc.$

（三）一階線性常微分之公式解：

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=r(x)$ 之解爲 ： $y(x)=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}r(x)dx+c]$ 。

❈ 常係數一階微分方程式：$\frac{dy}{dx}+ay=r(x)$，有時在求解偏微分方程或應用問題中經常用到，其解答並不一定侷限於公式解，(1)公式解、(2)未定係數法、(3)通解= 齊性解加特別解、(4)拉氏轉換皆可應用。

重點 13 可降階之微分方程式

$F(y,y',y'')=c,\ F(x,y',y'')=c$

一般二階常微分方程式 $F(x,y,y',y'')=c$ ，均不可求出封閉解，除非缺項。可降階之微分方程式共有兩種類型：

（一）$F(y,y',y'')=c$

令 $p=y'$ ，則 $y''=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ ，方程式 $F(y,y',y'')=c$ 可化簡爲一階微分方程式：

$F(y,p,p\frac{dp}{dy})=c$ 。

（二）$F(x,y',y'')=c$

令 $p=y'$ ，則 $y''=\dfrac{dp}{dx}=p'$ ，方程式 $F(x,y',y'')=c$ 可化簡爲一階微分方程式：
$F(y,p,p')=c$ 。

重點 14 常係數微分方程式

常係數微分方程式 $y''+ay'+by=r(x),\ a,b\in R$ ，

通解 $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ 。

齊性解：

$y''+ay'+by=0$ ，

令 $y_h(x)=e^{\lambda x}$ ，可得輔助方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ ，

(1) $\lambda=\lambda_1,\lambda_2\in R,(\lambda_1\neq\lambda_2)$ ， $y_h(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$ ，

(2) $\lambda=\lambda_1=\lambda_2\in R$ ， $y_h(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda_2 x}$ ，

(3) $\lambda=a\pm ib$ ， $y_h(x)=e^{ax}\left(c_1\cos cx+c_2\sin bx\right)$ 。

特別解：

（1）未定係數法；

（2）積分法。

重點 15 **Cauchy equation**

$x^2y''+axy'+by=0,\ a,b\in R$

齊性解：

令 $y_h(x)=x^m$ ，可得輔助方程式 $m^2+(a-1)m+b=0$ ，

(1) $m=m_1,m_2\in R,(m_1\neq m_2)$ ， $y_h(x)=c_1x^{m1}+c_2x^{m2}$ ，

(2) $m = m_1 = m_2 \in R$ ， $y_h(x) = c_1 x^m + c_2 \ln x . x^m$ ，

(3) $\lambda = a \pm ib$ ， $y_h(x) = x^m \left(c_1 \cos(b \ln x) + c_2 \sin(b \ln x) \right)$ 。

特別解：

（1）令 $x = e^t$ ，變數轉換法。

（2）積分法。

重點 16 **Exact equation**

$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ 為正合微分方程式之充要條件為：

$$a_0(x) - a_1'(x) + a_2''(x) = 0$$

❈正合微分方程式應使用長除法。

重點 **17** 高階線性微分方程式

(1) 已知 $y'' + p(x)y + q(x)y = 0$ 之一齊次解 $\phi_1(x)$ ，則另一齊次解：

$$\phi_2(x) = \phi_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[\phi_1(x)]^2} dx$$ 。

(2) 已知 $y'' + p(x)y + q(x)y = r(x)$ 之二齊次解 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ ，則另一特別解：

$$y_p(x) = -\phi_1(x) \int \frac{\phi_2(x) r(x)}{w(\phi_1(x), \phi_2(x))} dx + \phi_2(x) \int \frac{\phi_1(x) r(x)}{w(\phi_1(x), \phi_2(x))} dx$$ 。

❈注意此二公式之證明與參數變換法的使用。

重點 **18** 特徵值問題

特徵值問題的由來：偏微分方程式使用分離變數法之後，便形成常微分方程式的特徵值問題。

史特姆一李奧維爾(S-L)方程式: $\left[p(x)y' \right]' + \left[q(x) + \lambda \rho(x) \right] y = 0$ ，其中 $p(x), q(x), \rho(x)$

爲實數函數。

令 $L=\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{d}{dx}\right]+q(x)$，S-L 方程式可改寫爲：$Ly=-\lambda\rho y$。

S-L 方程式配合以下三種邊界條件：

(1) 齊次型：$\begin{cases} k_1y'(a)+l_1y(a)=0 \\ k_2y'(b)+l_2y(b)=0 \end{cases}$ $(k_i^{\,2}+l_i^{\,2}\neq 0)$

(2) 奇異型：$\begin{cases} p(a)=0 \\ p(b)=0 \end{cases}$

(3) 週期型：$\begin{cases} p(a)=p(b) \\ y(a)=y(b) \\ y'(a)=y'(b) \end{cases}$

其特徵函數在 $x\in[a,b]$ 必正交且爲完整。

【定理】對於不比間斷連續差的函數 $f(x)$，用此組特徵函數展開，可得

$f(x)=\sum_{1}^{\infty}c_n\phi_n(x)$，其中係數的計算爲：

$c_n=\dfrac{(f(x),\phi_n(x))}{(\phi_n(x),\phi_n(x))}$。

【定理】級數本身具有均值收斂(converge to the mean)的特性。在連續的點，級數學函數學的一模一樣好，在跳躍點的地方級數收斂致函數値的中點。

重點 19 傅立業級數與傅立業積分

(1) $f(x)$不比間斷連續差且 $f(x+T)=f(x)$，則

$f(x)$之傅立業級數：$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\dfrac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\dfrac{2n\pi x}{T})$，$x\in(-\infty,\infty)$。

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)dx, \\ a_n=\dfrac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\cos\dfrac{2n\pi x}{T}dx, \\ b_n=\dfrac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x)\sin\dfrac{2n\pi x}{T}dx, \end{cases}$$ 。

(2) $f(x)$之傅立業積分：$f(x)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right)d\omega$，$x\in(-\infty,\infty)$。

$$\begin{cases} A(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx, \\ B(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx \end{cases}$$ 。

(3) 傅立業餘弦級數： $C(x) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos\dfrac{2n\pi x}{2l} = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos\dfrac{n\pi}{l}x$ ， $x \in [0,l]$ 。

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{l}\int_0^l C(x)dx, \\ a_n = \dfrac{2}{l}\int_0^l C(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx, \end{cases}$$ 。

(4) 傅立業餘弦積分： $f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos\omega x d\omega$ ， $x \in [0,\infty)$ 。

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x dx,$$ 。

(5) 傅立業正弦級數： $S(x) = \sum_1^{\infty} b_n \sin\dfrac{2n\pi x}{2l} = \sum_1^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}$ ， $x \in [0,l]$ 。

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l S(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$ 。

(6) 傅立業正弦積分： $f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega)\sin\omega x d\omega$ ， $x \in [0,\infty)$ 。

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x dx,$$ 。

(7) $f(x)$之複數傅立葉級數： $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\dfrac{2n\pi x}{T}\right)$ ， $x \in (-\infty,\infty)$ 。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\exp\left(-\frac{2n\pi x}{T}\right)dx$$ 。

❋ 傅立葉級數在 $x \in [0,T]$ 必正交且為完整。對於不比間斷連續差的函數 $f(x)$，用此組特徵函數展開，具有均值收斂(converge to the mean)的特性。在連續的點，級數學函數學的一模一樣好，在跳躍點的地方級數收斂致函數值的中點。

【定理】 $f^{(m)}(x)$ 為間斷連續 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 之傅立業級數收斂級數，速度為： $\dfrac{1}{n^{(m+1)}}$ 。

【定理】收斂最慢的傅立業級數，收斂速度為 $\dfrac{1}{n}$ 。

【定理】 $f(x)$ 的傅立業級數，保證可以逐項積分。

【定理】 $f(x)$ 的微分不筆間斷連續差， $f(x)$ 的傅立業級數，保證可以逐項微分。

【定理】 $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$ ，則 Parsavl Identity 爲：

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(x)dx=a_0{}^2+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)$$ 。

【定理】$f(x)$之複數傅立葉級數： $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\exp\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$ ， $x\in(-\infty,\infty)$ ，則 Parsavl Identity 爲： $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n{}^2$ 。(注意 Parsavl Identity 之證明)

重點 20. 傅立業轉換

傅立業轉換： $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$ ，

傅立業反轉換： $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}dx$ 。 $x\in(-\infty,\infty)$ 。

傅立業轉換的性質：

(a) $\mathrm{F}[y']=i\omega Y(\omega)$ ， $\mathrm{F}^{-1}[y'']=-\omega^2Y(\omega)$ ，

(b) $f(x)$， $F(\omega)$轉換與反轉換前後保持相同之奇偶性。

重點 21. Laplace transform

拉氏轉換： $\mathcal{L}\,[f(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$ ，

拉氏反轉換：$\mathcal{L}^{-1}\,[F(s)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-u\infty}^{c+i\infty}e^{st}F(s)ds$ 。

拉氏轉換存在的條件爲：(1) $f(t)$不比間斷連續差，(2) 對於至少存在一個 $M>0$，$\alpha>0,|f(t)|<Me^{\alpha t}$ ，for $\forall\, t>0$。

拉氏轉換的性質：

(a) $\mathcal{L}\,[f(t)]=F(s-a)$，

(b) $\mathcal{L}\,[u(t-a)f(t-a)]=F(s-a)$，

(c) $\mathcal{L}[y']=sY(s)-y(0)$，

(d) $\mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau)d\tau\right]=\dfrac{Y(s)}{s}$，

(e) $\mathcal{L}[tf(t)]=-\dfrac{d}{ds}F(s)$，

(f) $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(s)ds$，　　　　　　　　　　　　　　【證明題】

(g) 初值定理：$\lim\limits_{s\to\infty} sY(s)=y(0)$，

(h) 終值定理：$\lim\limits_{s\to 0} sY(s)=\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$。(不見得永遠都成立)

迴旋積分（Convolution theorem）

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=g(t)*f(t)$$

【定理】$\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=F(s)G(s)$

❋注意迴旋積分之證明。

週期函數之拉氏轉換

若函數 f(t)爲以 T 爲週期之週期函數，則 $\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{1}{1-e^{-st}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$。

重點 22. 直角座標、有限區間之偏微分方程式

特徵值問題：$y''+\lambda y=0$，配合以下之邊界條見，其特徵函數分別爲：

(a) $y(0)=y(l)=0 \Rightarrow \left\{\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}, n=1,2,3,\cdots\cdots$

(b) $y'(0)=y'(l)=0 \Rightarrow \left\{1,\ \cos\dfrac{n\pi x}{l}\right\}, n=1,2,3,\cdots\cdots$

(c) $y(0)=y'(l)=0 \Rightarrow \left\{\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}\right\}, n=1,2,3,\cdots\cdots$

(d) $y'(0)=y(l)=0 \Rightarrow \left\{\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}\right\}, n=1,2,3,\cdots\cdots$

有限區間之偏微分方程式的解法分成以下五類形：

(1) 標準齊次方程+齊次邊界條件

key：使用特徵函數展開法。

EX：

$$\frac{\partial v}{\partial t}=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\quad 0<x<L,\ t>0$$

$$B.C.:\begin{cases}v(0,t)=0\\ v(L,t)=0\end{cases}$$

$$I.C.:v(x,0)=10$$

(2) 標準非齊次方程+齊次邊界條件

key：使用特徵函數展開法。

EX：

$$\frac{\partial v}{\partial t}=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\ +q(x,t),\ 0<x<L,\ t>0$$

$$B.C.:\begin{cases}v(0,t)=0\\ v(L,t)=0\end{cases}$$

$$I.C.:v(x,0)=f(x)$$

(3) 標準方程+非齊次邊界條件

key：先將邊界條件化為齊次。

EX：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

B.C.： $\begin{cases}u(0,t)=b\\ \dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x}=0\end{cases}$

I.C.： $u(x,0)=0$

(4) 非標準方程式+(非)齊次邊界條件

key：分離變數法解特徵狀態。

EX：

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

B. C.：$\begin{cases} u(0,t)=u(L,t)=0 \\ \dfrac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2}=0 \end{cases}$

I.C.：$\begin{cases} u(x,0)=2\sin\dfrac{\pi x}{L}-\sin\dfrac{2\pi x}{L} \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$

(5) 偏微分方程+變形(非)齊次邊界條件

key：分離變數法解特徵狀態。

EX：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

B.C.：$\begin{cases} u(0,y,t)=0 \\ u(1,y,t)+u_x(1,y,t)=0 \\ u(x,0,t)=0 \\ u(x,1,t)=0 \end{cases}$

I.C.：$u(x,y,0)=1$

非其次邊界條件的處理：

一維波動方程式：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$，$x\in(0,l)$，配上以下之邊界條件，

其因變數轉換應如下假設：

(a) B.C.：$u(0,t)=A(t), u(l,t)=B(t)$，應令因變數轉換為：

$u(x,t)=v(x,t)+A(t)+\left[B(t)-A(t)\right]\dfrac{x}{l}$，方程式與邊界條件成為：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t)-A''(t)-\left[[B''(t)-A''(t)]\frac{x}{l}\right], B.C.\begin{cases} v(0,t)=0 \\ v(l,t)=0 \end{cases}$$ 。

(b) B.C.：$u_x(0,t)=0, u_x(l,t)=B(t)$，應令因變數轉換為：

$u(x,t)=v(x,t)+\left[B(t)\right]\dfrac{x^2}{2l}$，方程式與邊界條件成為：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t)-\left[B''(t)\frac{x^2}{2l}\right]+\frac{a^2}{l}B(t), B.C.\begin{cases} v(0,t)=0 \\ v(l,t)=0 \end{cases}$$ 。

(c) B.C.：$u_x(0,t)=A(t), u_x(l,t)=0$，應令因變數轉換為：

$u(x,t)=v(x,t)+\left[-A(t)\right]\dfrac{(x-l)^2}{2l}$ ，方程式與邊界條件成為：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t)+\left[A''(t)\frac{(x-l)^2}{2l}\right]-\frac{a^2}{l}A(t),\ B.C.\begin{cases}v(0,t)=0\\ v(l,t)=0\end{cases}$$ 。

(d) B.C.： $u\ (0,t)=A(t), u_x(l,t)=B(t)$ ，應令因變數轉換為：

$u(x,t)=v(x,t)+\left[B(t)\right]x+A(t)$ ，方程式與邊界條件成為：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t)-B''(t)x-A''(t),\ B.C.\begin{cases}v(0,t)=0\\ v(l,t)=0\end{cases}$$ 。

❋以上化簡邊界條件的方式，乃至於是特徵函數展開法或分離變數法，並不僅僅只限於一維或有限區間的問題，亦可適用至高維或半無限乃至全無限介質的偏微分方程式之解法當中。