土木研所工程數學題解

鄒傑

91 台大土木

1. (a) A 爲正交矩陣，A 具有保長的性質。（正交矩陣有何特性？請同學自行回答）
   (b) $|\lambda|=1$。
   (c) A 爲正交矩陣，A 必爲爲正規(normal)矩陣，正規矩陣必可相似變換，么正(unitary)對角化，也就是 $P^{-1}AP=P^{*}AP=D$，所以其特徵向量矩陣：$P^{-1}=P^{*}$，因此可知 A 的特徵向矩陣，必互相(複數)正交。
   (d) A 爲么正交矩陣，A 具有保長的性質。其特徵值與特徵向量同正交矩陣。

2. $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{x\hat{i}+-z\hat{j}+y\hat{k}}{x^2+y^2+z^2}$

   旋度 $\nabla\times\vec{F}=\left(\dfrac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\ \dfrac{2x(y-z)}{(x^2+y^2+z^2)^2},\ \dfrac{2x(y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$，
   雖然在 x=0 上，$\nabla\times\vec{F}=0$，但線積分仍然與路徑相關，因爲向量函數 $\vec{F}(x,y,z)$ 含有奇異點。

   $$\int_c \vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_c \frac{xdx}{x^2+y^2+z^2}+\frac{-zdy}{x^2+y^2+z^2}+\frac{ydz}{x^2+y^2+z^2}$$

   依據題意 C 由(0,1,0)至（0,-2,0），取 x=0，z=0 ，y:1 到-2 的直線，x=z=0，代入上式的積分，則 $\int_c \vec{F}\bullet d\vec{r}=0$

   又

   計算：$\vec{F}\times d\vec{r}=\left(\dfrac{dy\,y}{x^2+y^2+z^2}-\dfrac{dz\,z}{x^2+y^2+z^2},\ -\dfrac{dz\,x}{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{dx\,y}{x^2+y^2+z^2},\ \dfrac{dy\,x}{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{dx\,z}{x^2+y^2+z^2}\right)$

   依據題意 C 由(0,1,0)至（0,-2,0），取 x=0，z=0 ，y:1 到-2 的直線，x=z=0，代入積分：
   $\int_c \vec{F}\times d\vec{r}=\int_c \dfrac{ydy}{x^2+y^2+z^2}\hat{i}=\int_c \dfrac{dy}{y}\hat{i}$ 當路徑通過原點（奇異點），其積分值不存在。

3. 分成 a=0 和 $a\neq 0$ 求解。
   a=0，用分離變數法，
   $a\neq 0$，先取平移，再取變數變換，參考上課內容第 13 章：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$。

4. (i) $\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$，拉普拉斯方程式，需要 x 和 y 各兩個邊界條件。選(a)。
   (ii) $\phi_{xx}-\phi_{yy}=0$，波動方程式，需要 x 兩個邊界條件和 y 兩個初始條件。選(e)。
   (iii) $\phi_{x}-\phi_{yy}=0$，擴散方程式，需要 x 一個初始條件和 y 各兩個邊界條件。沒有答案。

5. (a)4 個根：$\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$，$\frac{-1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$，

留數：$\sum\left|-\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}-\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\right|$。

(b)積分＝$\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}}$。

6. (a)代入尤拉方程式 $3y' \; x \; xy \; x$＝0，$y(1)=0, y(2)=3$，

解得：$y(x) = 4-\frac{4}{x^2}$。

(b) 按照 90 年台大土木第六題的推導：

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0 \\ \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}\right|^{x=a}+\frac{1}{\phi'(a)-y'(a)}L=0 \end{cases}$$

，其中 $\phi(x)=\frac{2}{x^2}-3$，

將所有條件代入，得：

$$\begin{cases} xy''+3y'=0\cdots(1) \\ y(1)=0\cdots(2) \\ 2a^3y'(a)(\frac{-4}{a^3}-y'(a))+a^3y'(a)^2=0\cdots(3) \\ y(a)=\frac{2}{a^2}-3\cdots(4) \end{cases}$$

一個方程式，三個代數條件，解一個函數 $y(x)$和一個未知數 a。

由(1)，(2)得 $y(x)=c(1-\frac{1}{x^2})$，將之代回(3)，

解得：

$$\begin{cases} c=0, a=\sqrt{\frac{2}{3}} \\ c=-4, a=\sqrt{2} \end{cases}$$

。

90 台大土木

1. （a） $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ，$\nabla \bullet \left(\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = 0$

   （b）微量面積：$d\sigma = |\vec{R}_u \times \vec{R}_v|\, du\, dv$ ，展開即得。

   （c）單位法向量：$(x-2)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

   （d）by 高斯散度定理，原式=0

2. 先平移：$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

   再取鏡射 $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

   $$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

3. 本題有點問題，因爲題目說，在閉區間 $x \in [0,1]$ 內爲可微分。
   一般並無此種說法，應爲函數在開區間 $x \in (0,1)$ 內爲可微分，較爲恰當。
   所以按一般之說法（a)，(c)，(d)僅爲連續函數，其傅立業級數在零之導數值不一定存在 ，而(b)之傅立業餘弦級數其在零之導數值爲零。

4. $a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0$

   解答: $y(x) = C_1 e^{\left(\frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)x} + C_2 e^{\left(\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)x}$

   若解答的指數部分的實部大於零，則解答將會無界。所以輔助方程式 $am^2 + bm + c = 0$ 兩根的實部均要小於或等於零

   (i)實根的情況： $b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-b}{a} \leq 0 \\ \dfrac{c}{a} \geq 0 \end{cases}$ ，

   (ii)共軛複數的情況：$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \dfrac{-b}{a} \leq 0$ 。

5. $\dfrac{\pi}{2}$

6. (a)代入尤拉方程式 $-2\sin x \ldots y \ldots y \ldots = 0$ ，$y(0) = \ldots$，$y'(0) = \ldots 2$

   解得：$y(x) = \dfrac{\sin x}{2} + e^{\ldots} + e^{x}$ 。

(b) 欲解決此類型的問題，首先假設 $y(x)$ 爲合於要求的函數，另取兩個函數 $\eta(x), g(x)$。($\eta(x), g(x)$) 爲任意函數，並不唯一，但可以假設成兩個已知之函數)

假設有一個偏離最佳解 $y(x)$ 的路徑 $Y(x)$: $\begin{cases} Y(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x) \\ X_1 = x_1+\varepsilon g(x_1) \end{cases}$ (此偏離路徑只是 x 的函數，ε 爲一微小之實變數)，$\eta(x), g(x)$ 均爲 $\begin{cases} =0, & x=0, \\ \neq 0, & x\neq 0. \end{cases}$ 。此偏離路徑之汎函爲：

$I=\int_0^{x_1} L(\dot{Y},Y,x)dx$ 。則

I 只與 ε 有關，且在 $\varepsilon=0$ 時，I 爲最小値，故 $\dfrac{dI}{d\varepsilon}=0$ 。

按照變分學的原始推導：

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=\int_0^{x_1}\frac{d}{d\varepsilon}L(\dot{Y},Y,x)\,dx+L(\dot{Y},Y,x)\frac{dX_1}{d\varepsilon}$$

$$=\int_0^{x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{Y}}\frac{d\dot{Y}}{d\varepsilon}+\frac{\partial L}{\partial Y}\frac{dY}{d\varepsilon}\right)dx+L(\dot{Y},Y,x_1)g(x_1)$$

$$=\int_0^{x_1}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{Y}}\dot{\eta}(x)+\frac{\partial L}{\partial Y}\eta(x)\right)dx+L(\dot{Y},Y,x_1)g(x_1)$$

$$=\int_0^{x_1}\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{Y}}\right)+\frac{\partial L}{\partial Y}\right]\eta(x)\,dx+\eta(x)\frac{\partial L}{\partial\dot{Y}}\bigg|_0^{x_1}+L(\dot{Y},Y,x_1)g(x_1)$$

$$=\int_0^{x_1}\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{Y}}\right)+\frac{\partial L}{\partial Y}\right]\eta(x)\,dx+\eta(x)\frac{\partial L}{\partial\dot{Y}}\bigg|^{x_1}+L(\dot{Y},Y,x_1)g(x_1)$$

$y(x_1+\varepsilon g(x_1))+\varepsilon\eta(x_1+\varepsilon g(x_1))=\phi(x_1+\varepsilon g(x_1))$ ，

再將上式兩邊對 ε 微分，可得出： $y'(x_1)g(x_1)+\eta(x_1)=\phi'(x_1)g(x_1)$ ，即 $g(x_1)=\dfrac{\eta(x_1)}{\phi'(x_1)-y'(x_1)}$

$\eta(x)$ 爲任意函數，但欲使得 $\dfrac{dI}{d\varepsilon}=0$ ，

故 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial y}=0$ ，

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{Y}}\bigg|^{x=x_1}+\frac{1}{\phi'(x_1)-y'(x_1)}L=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}\right)\Bigg|^{x=x_1}+\frac{\sqrt{1+(y'(x_1))^2}}{y(\phi'(x_1)-y'(x_1))}=0\text{ 。}$$

(依題意，此即爲 transversailty condition)

89 台大土木

1. - y t [illegible] 3 y' [illegible] 3 y [illegible] y [illegible] = [illegible] t / t

先解齊性解，再解特別解，特別解用變換參數法。（參考上課第 14 章積分法）

y t [illegible] ã [illegible] $t^2 + \frac{1}{2}$ ã^t log [illegible] + [illegible] $c_2\, t$ + ã^t c_1

2. (a) t=0，爲非正則奇異點。（因爲 $\sqrt{t}$ 在 t=0 不解析）。

(b) $t = x^2, x = \sqrt{t}$ ：自變數變換：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dx}\dfrac{1}{\sqrt{t}} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dx}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) = \dfrac{-t^{-3/2}}{4}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{4t}\dfrac{d^2y}{dx^2} \end{cases}$$

，代回方程式

$$\frac{-t^{-3/2}}{4}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{4t}\frac{d^2y}{dx^2} + t^{1/2}y = 0 \Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x^4 y = 0$$

x=0 爲正則奇異點。

(c) 略

3. (a)

f [illegible] 0,0,1 [illegible] y, z, [illegible]

(b)

f [illegible]

y' t [illegible] 0 [illegible] x [illegible] y [illegible] z [illegible] t [illegible] x' t [illegible] 0 [illegible] x [illegible] y [illegible] z [illegible] t

(c)

2 t f [illegible]

z' t [illegible] 0 [illegible] x s t [illegible] y [illegible] t [illegible] t² [illegible] s' t [illegible] x s [illegible] t [illegible] 0 [illegible] x s t [illegible] y [illegible] t [illegible] t²

4. (a)本題在 z=1 的平面上。將 z=1 代入和上課 Green's 定理有奇異點的例題，完全相同，請自行參閱。

(b)隨便積分兩個路徑（一個逆時針四分之一圓，一個順時針四分之三圓）即知不同

5. $AX = X\Lambda$ 爲特徵值問題 $Ax = \lambda x$ 的矩陣形式。

(a)A 爲正則，則 Λ 必存在，且 X 有 $X^* = X^{-1}$ 。

(b)A 爲對稱，則 Λ 必爲實數矩陣存在，且 X 有 $X^T = X^{-1}$ 。

6. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ ， $\frac{-1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ 。

(b) $\frac{\pi/4}{\sin(\pi/4)}$ 。

7. (a)由尤拉方程式：$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$，$1-3y' \; x^{2} \; y'' \; x$ =0，

(b) 配合初始條件 y(0)=1，y(2)=1，解得 y(x)=1。