土木研所工程數學題解

鄒傑

92 台大土木

1.

1. (9%) Let a, b, c be arbitray vectors in three-dimensional (Euclidean) space. They may be linearly independent or may be linearly dependent.

(a) Are a × b and b × a linearly independent? Why? Does your answer depend upon whether or not a and b are linearly independent?

(b) Are (a × b) × c, (b × c) × a, and (c × a) × b linearly independent? Why? (Prove your answer.) Does your answer depend upon whether or not a, b, and c are linearly independent?

【提示】

(a) 兩個向量大小相等，方向相反，故線性相關。

(b) 三個向量相加等於零，故線性相關。(題庫搬講義 4 頁)

2.

2. (12%) Let

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

and $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_3x_4 + 4x_4^2$.

(a) Find the eigenvalues and normalized eigenvectors of A.

(b) Discuss whether or not the normalized eigenvectors can be uniquely determined.

(c) Is $Q(x_1, x_2, x_3, x_4)$ always positive or negative for any real numbers x_1, x_2, x_3, x_4? Why? (Prove your answer.)

【提示】

(a) $\lambda = 3,3,5,5$

(b) 正交特徵向量，無法唯一被決定。(題庫搬講義 49 頁 表格)

(c) 恆正。（因爲特徵值爲正，化成標準式，即知二次式恆正）

3.

3. (12%) Let $f(x) = \cos \pi x$ be a real-valued function defined only on the unit interval, $0 \le x \le 1$.

(a) Find the Fourier series representation of $f(x)$.

(b) Find the Fourier sine series representation of $f(x)$.

(c) Which one of the above two representaions does give a better evaluation for $f(x)$ at $x = 0$? Why?

(d) Which one of the above two representaions does give a better evaluation for $\frac{df}{dx}(x)$ at $x = 0$? Why?

【提示】

（題庫班講義 140 頁）

(c)，(d)答案都是傅立業級數，不是傅立業正弦級數。

4.

(15%) Solve for $y(x)$ the following initial value problem,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=xe^{-x},$$
$$y=1 \text{ at } x=0,$$
$$\frac{dy}{dx}=0 \text{ at } x=0.$$

【提示】(題庫搬講義 153 頁)
使用拉普拉斯變換。

$$y(x)+2\,y'(x)+y''(x)==e^{-x}x$$

$$Y(s)\,s^2+2\,Y(s)\,s+Y(s)==\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$Y(s)\to\frac{1}{(s+1)^4}$$

$$y(x)\to\frac{1}{6}\,e^{-x}\,x^3$$

5.

(18%) Solve the following boundary value problem,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial r}=2\cos\theta \text{ for } r=2,$$
$$f=3r\cos\theta \text{ as } r\to\infty,$$

for the function $f(r,\theta)$ defined in the region $2\le r<\infty, 0\le\theta<2\pi$ of a plane, for which (r,θ) is the polar coordinates.

【提示】題庫搬講義 137 頁
圓孔之極座標偏微分方程式，通解：

$$u(r,\theta)=\alpha_0+\beta_0\ln r-\frac{r^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta\right)r^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)r^{-n}$$ 。

詳細內容參閱上課內容第 24 章。

6.

6. (23%) Let z, z_0 be complex variables and $f(z)$ be a complex function.

(a) (15%) Evaluate the integral $\int_C (z-z_0)^n dz$, (n = integer), along the circle C with center at z_0 and radius r described in the counterclockwise direction.

(b) (8%) Find $\int_C f(z)dz$ if $f(z)=k$ (a constant), z, $\frac{1}{z}$, $\frac{2\sinh^2 z+3\cosh 3z}{z}$, respectively, where C is any simple closed contour having $z_0=0$ in its interior, and C is taken in the positive direction.

【提示】

(a)原式$=\begin{cases}2\pi i, & n=-1\\ 0\ , & n\neq -1\end{cases}$

(b)利用第一小題的結果(或者利用留數定理)，可知答案分別爲 0，0，$2\pi i$，$6\pi i$ 。(本題分母爲 z 的一次方，上課的題目不清楚，我看成三次方)(題庫搬講義 73

頁）

7.

7. (11%) Find the extremals for the following functionals:

(a) $v(y(x)) = \int_2^3 y^2(1-\frac{dy}{dx})^2 dx$ with $y(2)=1$ and $y(3)=3$;

(b) $v(y(x), z(x)) = \int_0^1 y'z'dx$ with $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $z(0)=0$, and $z'(0)=1$.

【提示】

（a）直接使用 Lagrange’s equation: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$，即可得出

$-2\,y(x)\left(y'(x)^2+y(x)\,y''(x)-1\right)==0$

又 L 本身並非自變數 x 的函數，所以可利用 $y'\frac{\partial L}{\partial y'}-L=c_1$，得：

$y^2((y')^2-1)=c_1$，

整理可得：

$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{y^2+c_1}}{y}$，解出通解爲：$\sqrt{y^2+c_1}=x+c_2$

配合初始條件，

可解得：

$y[x]\to\sqrt{-9+3x+x^2}$ 。（負號不合）

（b）雙因變數的變分學問題：變成兩個 Lagrange’s equation:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0$

解聯立微分方程式：$\begin{cases} y''=0 \\ z''=0 \end{cases}$，搭配初始條件可知：$\begin{cases} y=x \\ z=x \end{cases}$

92 交大土木

1.

1. (30%) 試以級數解求解

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-y=0;$$

並求該解之收斂半徑 。

【提示】

正則奇點，使用弗羅畢尼士級數，參閱上課筆記第 15 章。

2.

2. (20%) 試求解

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0\text{，}k=0.01\text{，}\quad 0\le x\le 1\text{，}t\ge 0\text{；}$$

在 $x=0$ 與 $x=1$ 處，$w=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$；當 $t=0$，$\dfrac{\partial w}{\partial t}=0$ 且 $w=\sin\pi x+0.5\sin 5\pi x$。

【提示】

題庫搬講義 166 頁。

3.

3. (25%) 試求下列線性系統之通解

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{d^2u_1(t)}{dt^2}\\ \dfrac{d^2u_2(t)}{dt^2}\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

【提示】題庫搬講義 63 頁。

x[t] →

$$\frac{1}{15}\left(5\,(C[3]+2C[4])\,\mathrm{Cos}[t]+10\,(C[3]-C[4])\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{\frac{5}{2}}\,t\right]+5\,(C[1]+2C[2])\,\mathrm{Sin}[t]+2\sqrt{10}\,(C[1]-C[2])\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{\frac{5}{2}}\,t\right]\right),$$

y[t] →

$$\frac{1}{15}\left(5\,(C[3]+2C[4])\,\mathrm{Cos}[t]+5\,(-C[3]+C[4])\,\mathrm{Cos}\left[\sqrt{\frac{5}{2}}\,t\right]+5\,(C[1]+2C[2])\,\mathrm{Sin}[t]+\sqrt{10}\,(-C[1]+C[2])\,\mathrm{Sin}\left[\sqrt{\frac{5}{2}}\,t\right]\right)$$

4.

(15%) (a) 若運動方程式 $u''(t)+0.02u'(t)+25u(t)=p(t)$，且 $u(0)=u'(0)=0$，若定義其位移頻率響應函數 $u(i\omega)=H(i\omega)p(i\omega)$，其中 $u(i\omega)$ 為 $u(t)$ 之傅立葉轉換，$p(i\omega)$ 為 $p(t)$ 之傅立葉轉換，$i=\sqrt{-1}$。試求 $H(i\omega)$；

(10%) (b) 若已知 $h(t)=\mathrm{F}^{-1}\{H(i\omega)\}$，請將前述運動方程式之解 $u(t)$ 表示成 convolution integral 之形式。

【提示】

(a) 本題雖然為傅立業變換，將 s=iw，當成拉普拉斯變換即可。

所以 $u(iw)=\dfrac{p(iw)}{(25-w^2)+0.02iw}$。

(b) $u(t)=\int_{-\infty}^{t}p(\tau)h(t-\tau)d\tau$。

92 成大土木

1. (20%) Solve the boundary value problem

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi(\mathbf{x})=-2,\ \mathbf{x}\in\Omega;\quad \Phi(\mathbf{x})=0,\ \mathbf{x}\in\partial\Omega$$

where Ω is a circle centered at the point $\mathbf{x}_0$ with radius R, i.e.

$$\Omega:|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\le R,\quad \partial\Omega:|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=R.$$

Express $\Phi(\mathbf{x})$ in terms of $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$ and R.

【提示】

本題為極座標波義松(Poisson's equation)方程式。

(1) 先改換成極座標: $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta^2}=-2$。

(2) 將之視為非齊性的方程式：仍然使用分離變數法先解出 θ 方向，為 1，$\cos n\theta$，$\sin n\theta$。

(3) 再解半徑方向：$\begin{cases} r^2R''+rR'=-2r^2 \\ r^2R''+rR'-n^2R=0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} R=\alpha_0+\beta_0\ln r-\dfrac{r^2}{2} \\ R=c_1r^n+c_2r^{-n} \end{cases}$，可求出通解：

$$u(r,\theta)=\alpha_0+\beta_0\ln r-\frac{r^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta\right)r^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)r^{-n}$$

(4) 代入半徑方向的邊界條件 R(r=0)＝有限，R（R）=0，可計算出係數，即得出特解為：$u(r,\theta)=\frac{1}{2}\left(R^2-r^2\right)$。

台科大 92 營建工程研究所（乙）

一、有一微分方程式如下：

$$x^2y''-2xy'+2y=10\sin(\ln x)$$

其中，$x>0$，$y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$，ln 為自然對數。

(1) 試用變數轉換法令 $z=\ln x$，將原方程式轉換為以 z 為自變數之「常係數微分方程式」。 (10%)

(2) 續上題，若知 x=1 時，$y(x)=3$，$y'(x)=0$，試求其解 $y(x)=$？ (15%)

【提示】

(1) $y[x]\to x\,C[1]+x^2\,C[2]+3\,\mathrm{Cos}[\mathrm{Log}[x]]+\mathrm{Sin}[\mathrm{Log}[x]]$

(2) $y[x]\to x-x^2+3\,\mathrm{Cos}[\mathrm{Log}[x]]+\mathrm{Sin}[\mathrm{Log}[x]]$

二、線性聯立方程式之矩陣式為：**AX = B**

其中，$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\1&1&k^2-5\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1\\2\\k\end{bmatrix}$

(1) 若此聯立方程式有唯一解，則 k 值為何？ (10%)

(2) 若 $k=3$，試求 A 之反矩陣？ (15%)

【提示】

(1) 行列式不等於零，方程組可以有唯一解。$k\neq\pm2$。

三、定義單位階梯函數(unit step function)如下：

$$u(t-a)=0 \quad \text{if} \quad t<a$$
$$u(t-a)=1 \quad \text{if} \quad t\ge a$$

(1) 已知函數 $f(t)=2t[1-u(t-2)]-2(t-4)[u(t-2)-u(t-4)]$，試求 $f(t)$ 的拉普拉氏轉換，$L[f(t)]=?$。(10%)（提示：$L[u(t-a)y(t)]=e^{-as}L[y(t+a)]$）

(2) 試以二階微分方程式爲例，簡要說明如何應用拉普拉氏轉換來求解，並舉出較適合應用此法求解之微分方程式類型？ (15%)

【提示】

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2}\left(2-4e^{-2s}+2e^{-4s}\right)$。

(2) 常係數為分方程式，含初始條件或邊界條件;或者變係數為分方程式，係數含自變數的一次方。

四、有一偏微分方程式如下所示：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$；其中，$0\le z\le 2H$，$t\ge 0$，$a$ 爲常係數。應用變數分離法及已知之邊界條件求得其解爲：

$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right)\ \exp\left(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{4H^2}\right)$$
；其中 exp 代表指數函數。

(1) 試根據初始條件：$u(z,0)=u_0$，求待定係數 $A_n=?$ (15%)

(2) 試舉出一個應用此種偏微分方程式求解的大地工程問題，並說明在你所舉出的問題中係數 a 的物理意義爲何？(10%)

【提示】

(1) $A_n=\dfrac{1}{H}\displaystyle\int_0^{2H}u_0\sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right)dz=\frac{2u_0}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$。

台科大 92 營建工程研究所（丙）

一. 試解 $y'=\dfrac{y-3}{x+y-1}$ 之通解。 (20%)

【提示】令 $\begin{cases}X=x+2\\Y=y-3\end{cases}$，再令 $v=\dfrac{Y}{X}$。

二. 試解 $yy''=(y')^2$ 之通解。 (20%)

【提示】

降階法，令 $p=\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}=p\dfrac{dp}{dy}$ 。

三. 令 $\vec{y}=A\vec{x}$ 其中 $\vec{x}=\langle x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x_m\rangle^t$ ， $\vec{y}=\langle y_1,y_2,\cdots,y_{m-1},y_m\rangle^t$ ，

A 爲 $m\times m$ 之矩陣， $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{m\times m}$

(1). 已知當 $x_n=\sin(n\theta),n=1,\cdots,m$ 時，則 y_n 可表爲 $y_n=x_nf(\theta),n=2,\cdots,m-1$ ， 求 $f(\theta)$ 。 (5%)

(2). 當 $x_n=\sin(n\theta),n=1,\cdots,m$ 時，試求所有合適之 θ 值可同時滿足 $y_1=x_1f(\theta)$ 及 $y_m=x_mf(\theta)$ 。 (10%)

(3). 考慮 $m=4$ ，求 A 之所有特徵值(eigen-value) λ ，及其所對應之特徵向量(eigen-vector) $\vec{e}$ ，並逐一列出。 (10%)

【提示】

這一題上課的解法有錯誤！！！

(1) 取第 n 列，展開得：
$$\begin{aligned} y_n &= -\sin(n-1)\theta+2\sin n\theta-\sin(n+1)\theta \\ &= -2\sin n\theta\cos\theta+2\sin n\theta \\ &= 2\sin n\theta(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

(2) 取第 1 列與第 m 列： $\begin{cases} y_1=2\sin\theta-\sin 2\theta \\ y_m=-\sin(m-1)\theta+2\sin m\theta \end{cases}$ ，整理得：

$\begin{cases} y_1=2\sin\theta(1-\cos\theta) \\ y_m=2\sin m\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(m+1)\theta \end{cases}$,

依據題意，必須 $\sin(m+1)\theta=0$ ，所以 $\theta=\dfrac{k\pi}{m+1},k=1,2,3,.....m$ 。

(3)利用第一，二小題的結果，可知當 $\theta=\dfrac{\pi}{5},\dfrac{2\pi}{5},\dfrac{3\pi}{5},\dfrac{4\pi}{5}$ ，即其特徵值爲：

$\lambda=2-2\cos\theta=2-2\cos\dfrac{\pi}{5},2-2\cos\dfrac{2\pi}{5},2-2\cos\dfrac{3\pi}{5},2-2\cos\dfrac{4\pi}{5}$ ，

其特徵向量爲：$\begin{bmatrix} \sin\frac{k\pi}{5} \\ \sin\frac{2k\pi}{5} \\ \sin\frac{3k\pi}{5} \\ \sin\frac{4k\pi}{5} \end{bmatrix}, k=1,2,3,4$

四. 試由 $F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-s\bar{\tau}} f(\bar{\tau})d\bar{\tau} \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)d\tau$ 爲起點，證明 Convolution 定理

$$F(s)G(s)=L\left[\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\right]$$

其中 $L[\cdot]$ 爲 Laplace Transform 運算符號， $F(s)=L[f(t)]$ ， $G(s)=L[g(t)]$ 。 (15%)

【提示】重積分 交換順序的問題，請參閱上課筆記。

五. 令一向量場 $\vec{F}(x,y,z)$ 爲 $\vec{F}=(y-4xz)\vec{i}+(x+\alpha z)\vec{j}+(3z^2+\beta x^2)\vec{k}$

，其中 α 與 β 爲常數。已知 $\vec{F}$ 沿路徑 C_1 與 C_2 所作之功相同，其中

C_1 爲 $(0,0,0)\to(3,4,2)\to(-3,2,1)\to(1,2,3)$ 之折線，

C_2 爲 $(0,0,0)\to(2\pi,5,1)\to(-1,0,1)\to(1,2,3)$ 之折線。

(1). 試求 α 與 β 之值。 (10%)

(2). $\vec{F}$ 沿路徑 C_1 或 C_2 所作之功。 (10%)

【提示】

(1) $\alpha=0, \beta=-2$ 。

(2) 位能函數：$\phi(x,y,z)=xy-2x^2z+z^3+c$ ，

故作功=$\phi(1,2,3)-\phi(0,0,0)=23$ 。

成大 89 水利及海洋工程研究所

第八題

8. (12%) Find a linear fractional transformation that maps $|z| \le 1$ onto $|w| \le 1$ such that $z = \frac{i}{2}$ is mapped onto $w = 0$ and sketch the images of the lines $x = \text{const}$ and $y = \text{const}$.

【提示】

(1) 線性分式映射：$w = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c}\left(\dfrac{z+b/a}{z+d/c}\right) = \alpha\dfrac{z-\beta}{z-\gamma}$

(2) 取條件 |z|=1 映射至 |w|=1 (邊界對邊界) 且 z=i/2 映射至 w=0，故有：

$$\begin{cases} |w| = |\alpha|\dfrac{|z-\beta|}{|z-\gamma|} = 1 \\ \beta = i/2 \end{cases}$$

(3) 我們代入圓上的點 z = 1 和 -1 可得

$$|\alpha|\frac{|1-i/2|}{|1-\gamma|} = |\alpha|\frac{\sqrt{5}/2}{|1-\gamma|} = 1$$

$$|\alpha|\frac{|-1-i/2|}{|-1-\gamma|} = |\alpha|\frac{\sqrt{5}/2}{|1+\gamma|} = 1$$

將兩式相除，可得 $|1+\gamma| = |1-\gamma|$，可得出γ爲純虛數。

(4) 又將 z=i 和-i 代入，得

$$|\alpha|\frac{|i-i/2|}{|i-\gamma|} = |\alpha|\frac{1/2}{|i-\gamma|} = 1$$

$|\alpha|\dfrac{|-i-i/2|}{|-i-\gamma|} = |\alpha|\dfrac{3/2}{|i+\gamma|} = 1$，如同第三步驟，也將兩式相除。

綜合(3),(4)可得$\gamma = 2i$，$|\alpha| = 2$。

(5) 故解答爲$w = \alpha\dfrac{z-i/2}{z-2i}$，$|\alpha| = 2$。

(6) 如果將 x=const 和 y=const 代入，映射結果爲一圓。

成大 90 水利及海洋工程研究所第 9 題

複數z平面上 $x=0, \pm1, \pm2$, $y=0, \pm1$, 經 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 映至w平面上所對應之像為何？繪圖示之。(16%)

【提示】

$w = \dfrac{z-1}{z+1}$，代入 w=u+iv

也就是$z = \dfrac{-w-1}{w-1} = \dfrac{(-u-1)-iv}{(u-1)+iv} = \dfrac{-u^2-1-v^2}{(u-1)^2+v^2} + i\dfrac{2v}{(u-1)^2+v^2}$。

(1) x=0，取$\dfrac{-u^2-1-v^2}{(u-1)^2+v^2}$＝0，圖形爲單位圓。

(2) x=1，取$\dfrac{-u^2-1-v^2}{(u-1)^2+v^2}$＝1，代入得$u^2+u+v^2=1$，也是一個圓。

(3) x=-1，取$\dfrac{-u^2-1-v^2}{(u-1)^2+v^2}$＝-1，代入得$u=1$，是一直線。

其他依此要領。

做完這題之後，同學們應該可以比較 86 成大水利第八題:

求複數 z 平面上 ($z=x+iy$), x 軸, y 軸, $x=+1$, $x=-1$, $y=-1$, $y=+1$, $y=+2$, $y=+3$. 經可析函數 $w=\dfrac{z+1}{z-i}$ 映至 w 平面後所得之像, 繪圖示之。 (16%)

可知成大水利研究所，每年也幾乎都考一題複變映射，如同台大土木每年都考一題變分學一樣，成爲該研究所考試的特色。