重點30. 一階常微分方程式

$f(x,y,y')=c$，（隱函數表示法）

$y'=f(x,y)$，（顯函數表示法）

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$。（全微分表示法）

一階常微分方程式，以實用的角度予以區分，可分成以下四類：

(1) 變數分離型，

(2) 正合型與積分因子，

(3) 一階線性常微分，

(4) 完全微分型。

（一）分離變數型

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=p(x)q(y)\Rightarrow\frac{dy}{q(y)}=p(x)dx\ ，$$

$$\int\frac{dy}{q(y)}=\int p(x)dx+c\ 。$$

但對於有些方程式雖然不能如上式般直接予以變數分離，但是經由適當的變數轉換也可以分離變數，例如：

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=g(ax+by)\ ，$$

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\frac{2xy}{x^2-y^2},\ \frac{y^3-x^3}{(x+y)^3},\cdots,etc.$$

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0\begin{cases}(1)\ \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2},\\(2)\ \dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2},\end{cases}$$

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0,$$

$$yf(x^my^n)dx+xg(x^my^n)dy=0,\ (m,n\in R)$$

$$\cdots\cdots\cdots,\ etc.$$

（三）一階線性常微分之公式解：

$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=r(x)$之解為 ： $y(x)=e^{-\int p(x)dx}[\int e^{\int p(x)dx}r(x)dx+c]$。

【證明題：84交大光電】

❈ 常係數一階微分方程式：$\dfrac{dy}{dx}+ay=r(x)$，有時在求解偏微分方程或應用問題中經常用到，其解答並不一定侷限於公式解，(1)公式解、(2)未定係數法、(3)通解= 齊性解加特別解、(4)拉氏轉換皆可應用。

【精選範例 1】

試求$(x^2+y^2)\,dx-xydy=0$之通解。 【83清大電機、交大運輸】

【解答】：

(1)原微分方程式可改寫成： $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$，

函數$f(x,y)$與y/x函數相關，

(2)取$u=y/x$，則有$y=xu'+u$，且微分方程成為：

$xu'+u=\dfrac{1+u^2}{u}\Rightarrow udu=\dfrac{1}{x}dx$，

(3)故解為： $\dfrac{1}{2}u^2=x+c$；

或者是： $\dfrac{y^2}{2}=x^3+cx^2,\ c\in R$。

【精選範例 2】

試解 $y'=\dfrac{2y-x+5}{2x-y-4}$。 【大同材研】

【解】：首先利用座標平移消去常數5和-4，

$$\begin{cases}2y-x+5=0\\2x-y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}\text{。}$$

取 $\begin{cases}r=x-1\\s=y+2\end{cases}$，則方程式變作：$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dr}}=\frac{2s-r}{2r-s}$（齊次型）。

取因變數轉換 $u=s/r$，則 $\frac{ds}{dr}=u++r\frac{du}{dr}$，代回前式，原式變作：

$$u+r\frac{du}{dr}=\frac{2u-1}{2-u}\Rightarrow\frac{2-u}{u^2-1}du=\frac{1}{r}dr\text{，}$$

故解爲：

$$\int\frac{2-u}{u^2-1}du=\int(\frac{1/2}{u-1}+\frac{-3/2}{u+1})du=\ln r+c\text{，}$$

$$\frac{u-1}{(u+1)^3}=cr^2\Rightarrow\frac{s/r-1}{(s/r+1)^3}=\frac{(s-r)r^2}{(s+r)^3}=cr^2\text{，}$$

也就是 $(y-x+3)=c(y+x+1)^3$，　$c\in R$。

【精選範例 3】

試解 $x\frac{dy}{dx}-y=\frac{x^3}{y}e^{y/x}$。　　　　【79交大電子】

【解答】：此微分方程式可改寫成：

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\frac{y}{x}+\frac{x^2}{y}e^{y/x}\text{。}$$

函數 $f(x,y)$ 與 y/x 並不函數相關，但 **“幾乎”** 相關，仍取變數變換：$u=y/x$，代回前式：

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=u+\frac{x}{u}e^u\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}e^u\text{，}$$

兩邊同時積分可得：

$$\int ue^{-u}du=\int dx+c\Rightarrow-ue^{-u}-e^{-u}=x+c\text{，}$$

$$x+(\frac{y}{x}+1)e^{-y/x}=c\text{。}$$

(1) 試解 $(x-y)dx+(x+y)dy=0$ 【83交大機械】

【解答】：$1/2\ln(x^2+y^2)+\tan^{-1}(y/x)=c$。

(2) 試解 $y'=\dfrac{-3x+y+6}{x+y+2}$。 【83清大化工】

（提示：取 $r=x-1$，$s=y+3$，座標平移至原點）

【解答】：$\ln|x-1|+\dfrac{1}{2}\left[\ln\left|\dfrac{y+3x}{x-1}\right|+\ln\left|\dfrac{y-x+4}{x-1}\right|\right]=c$。

【精選範例 4】

(1) $(2xy+2y^2)dx+(x^2+4xy)dy=0$ 【85成大環工】

(2) $(3xy+y+4)dx+\dfrac{1}{2}(x)dy=0$ 【85台大農工】

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y^2}$ 【85成大工科】

(4) $y=xy'+\dfrac{1}{2}(y')^2$ 【85成大電機】

【提示】：

(1) 正合形。

ans： $x^2y+2xy^2=c$

(2) 積分因子形。

積分因子＝ xe^{6x}，

解答： $\dfrac{1}{2}yx^2e^{6x}+\dfrac{2}{3}xe^{6x}-\dfrac{1}{9}e^{6x}=c$。

(3) 一階線性常微分。

將因變數與自變數交換可得：$\frac{dx}{dy}-x=y^2$。

ans：$x=ce^y+(-y^2-2y-2)$。

(4) 克勞洛方程式。

※克勞洛方程式，先將方程式微分再予以求解。

ans：$\begin{cases} y=cx+\frac{1}{2}c^2 \\ y=\frac{-1}{2}x^2 \end{cases}$。

【精選範例 5】

(1) $1+x^2y^2+y+x\frac{dy}{dx}=0$ 【86交大電信】

(2) $x^2y^2+y+x\frac{dy}{dx}=0$

(3) 2.(20%) $\frac{dy}{dx}=(y-x-1)+(x-y+2)^{-1}$ 【86清大化工】

(4) 1.(10%) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y^2+\frac{1}{x}y-\frac{2}{x}$ 【87台科大整合技術】

【提示】：

(1) 本題微利卡提方程式，但可用完全微分形的方法求解。

方程式可改寫爲：

$$(1+y+x^2y^2)dx+xdy=0$$

$$(xdy+ydx)+(1+x^2y^2)dx=0$$

$$\frac{d(xy)}{1+x^2y^2}+dx=0$$

$$\tan^{-1}(xy)+x=c$$

(2) 白努力方程式

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2 \Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=x$$

令 $v=1/y$，則 $y^{-2}y'=-v'$

ans： $y=\dfrac{c}{x+cx^2}$ 。

(3) 分離變數

令 $v=x-y+2$，則 $y'=1-v'$

方程式可化簡為： $1-\dfrac{dv}{dx}=v+1+\dfrac{1}{v}$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v^2+1}{v} \Rightarrow \frac{dv}{v^2+1}=-dx$$
$$\frac{1}{2}\ln(v^2+1)=-x+c$$
$$\frac{1}{2}\ln\left((x-y+1)^2+1\right)=-x+c$$

(4) 本題為利卡提方程式，但可用分離變數的方法求解。

方程式可改寫為：

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{(-2+y+y^2)}=\frac{dy}{(y+2)(y-1)}$$

$$\frac{dx}{x}=\left(\frac{-1/3}{y+2}+\frac{1/3}{y-1}\right)dy$$

$$\ln|x|=\frac{-1}{3}\ln|y+2|+\frac{1}{3}\ln|y-1|+c$$

【精選範例 6】

The $I(x)=\int_0^\infty e^{-(t^2+\frac{x^2}{t^2})}dt$ is exist and given.

Please find

(1) The O.D.E. can be proved by

$$\frac{dI(x)}{dx}+2I(x)=0$$

(2) $I(3)=?$ 【87台科大整合技術】

【提示】：

(1) $I(x)=\int_0^{\infty} e^{-(t^2+\frac{x^2}{t^2})}dt$

(2) $\frac{dI(x)}{dx}+2I(x)=0$

(3) 解 $\frac{dI(x)}{dx}+2I(x)=0$，得 $I(x)=ce^{-2x}$ 。

代入 $I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ，得 $I(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2x}$ ，

故 $I(3)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-6}$ 。

重點31. 可降階之微分方程式 $F(y,y',y'')=c,\ F(x,y',y'')=c$

一般二階常微分方程式 $F(x,y,y',y'')=c$，均不可求出封閉解，除非缺項。可降階之微分方程式共有兩種類型：

（一） $F(y,y',y'')=c$

令 $p=y'$，則 $y''=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，方程式 $F(y,y',y'')=c$ 可化簡爲一階微分方程式： $F(y,p,p\frac{dp}{dy})=c$ 。

（二） $F(x,y',y'')=c$

令 $p=y'$，則 $y''=\frac{dp}{dx}=p'$，方程式 $F(x,y',y'')=c$ 可化簡爲一階微分方程式： $F(y,p,p')=c$ 。

【精選範例 7】

$yy''=(y')^3$ 。

【84 中山機械】

【提示】：

(1)令 $p=y'$，則 $y''=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ ，

(2)方程式 $yy''=(y')^3$，化簡爲 $yp\frac{dp}{dy}-p^3=0$

(3)ans： $y\ln y-y+c_1y+x=c_2$ 或 $y=c_3$ 。

【精選範例 8】

$y''+(y')^2=0$ 。

—

【提示】：

(1)令 $p=y'$，則 $y''=\dfrac{dp}{dx}=p'$

(2)方程式 $y''+(y')^2=0$，化簡為 $\dfrac{dp}{dx}+p^2=0$

(3) $y=\ln(x+c_1)+c_2$。

重點32. 常係數微分方程式

常係數微分方程式 $y''+ay'+by=r(x), a,b\in R$，

通解 $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$。

齊性解：

$y''+ay'+by=0$，令 $y_h(x)=e^{\lambda x}$，可得輔助方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$，

(1) $\lambda=\lambda_1,\lambda_2\in R,(\lambda_1\neq\lambda_2)$， $y_h(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$，

(2) $\lambda=\lambda_1=\lambda_2\in R$， $y_h(x)=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda_2 x}$，

(3) $\lambda=a\pm ib$， $y_h(x)=e^{ax}\left(c_1\cos cx+c_2\sin bx\right)$。

特別解：

(1)未定係數法；

(2 積分法。

【精選範例 9】

(A) 試求: $y''-3y'+2y=e^x\sin x$ 之通解？ 。

(B) 試求: $y''-2y'+2y=e^x\sin x$ 之通解？ 。

—

【提示】：

(A) ans： $y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{e^x}{2}(\cos x-\sin x)$ 。

(B)

(1)利用尤拉公式： $e^x\sin x=\mathrm{Im}[e^{(1+I)x}]$

解 $y''-2y'+2y=e^{(1+i)x}$ 之特解，

(2)最終取 $y_p=\mathrm{Im}[axe^{(1+i)x}]$

(3)通解 $y(x)=e^x\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)-\frac{xe^x}{2}\cos x$ 。

【精選範例 10】

If the x and y are both real numbers except zero and a function u(x,y) follows a P.D.E.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+9y^2u=\csc(3yx)$$

please solve the P.D.E. by the following step：

(a) For the associated homogeneous equation

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2}+9y^2u_h=0$$

Prove that you can find two arbitary functions, f(y) & g(y). such that u_h may be written as(5%)

$$u_h(x,y)=f(y)\cos(3yx)+g(y)\sin(3yx)$$

(b) Using The above result, please find the particular solution $u_p(x,y)$ of the origional nonhomogeneous equation(10%)

(c) What is the general solution of the origional P.D.E.?(5%)

【86 台大電機】

【提示】：

(a) 將變數 y 視爲常數，則本題可當作常係數微分方程式，輔助方程式的根爲 $3yi$，故兩個齊性解爲三角函數 ：

$u_h(x,y)=f(y)\cos(3yx)+g(y)\sin(3yx)$。

（二階常微分方程式之解含兩個未定之常數；

二階偏微分方程式之解含兩個未定之函數）

(b) 使用公式法求特解：

$$y_p(x)=-\phi_1(x)\int\frac{\phi_2(x)r(x)}{w(\phi_1(x),\phi_2(x))}dx+\ \phi_2(x)\int\frac{\phi_1(x)r(x)}{w(\phi_1(x),\phi_2(x))}dx$$

$$u_p(x,y)=\frac{\sin(3yx)\ell n[\sin(3yx)]}{9y^2}-\frac{x\cos(3yx)}{3y}$$

(c) $u(x,y)=u_h(x,y)+u_p(x,y)$

$$=f(y)\cos(3yx)+g(y)\sin(3yx)+\frac{\sin(3yx)\ell n[\sin(3yx)]}{9y^2}-\frac{x\cos(3yx)}{3y}$$

重點33. Cauchy equation

$$x^2y''+axy'+by=0,\quad a,b\in R$$

【精選範例 11】

(A) $(4x^2+12x+9)y''+(12x+18)y'+4y=0$

(B) 1 . (8%) $xy'''+2xy'-2y=x^2\ln x+3x$ 【86 交大機械】

【提示】：

(A)

(1)令 $s=2x+3$，方程式可轉換爲 $s^2\dfrac{d^2y}{ds^2}+3s\dfrac{dy}{ds}+y=0$

(2)在解齊性解 $\begin{aligned} y &= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s}\ln s \\ &= \frac{c_1}{2x+3} + \frac{c_2}{2x+3}\ln(2x+3) \end{aligned}$

(B)

(1) $y_h(x) = c_1 x + c_2 x \sin[\ln x] + c_3 x \cos[\ln x]$

(2)使用變數變換法 $x = e^t$，求特解：

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\left[-2x^2 + 6x\ln x + x^2 \ln x\right]$$

(3)故通解為：

$$y(x) = c_1 x + c_2 x \sin[\ln x] + c_3 x \cos[\ln x] + \frac{1}{2}\left[-2x^2 + 6x\ln x + x^2 \ln x\right]$$

重點34. Exact equation

$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ 為正合微分方程式之充要條件為：

$$a_0(x) - a_1'(x) + a_2''(x) = 0$$

❈正合微分方程式應使用長除法。

【精選範例 12】

1.(10%) 試求: $y'' - 2xy' - 2y = 0$ 之通解?

【提示】：

(1) $a_0(x) - a_1'(x) + a_2''(x) = 0$ ，方程式為正合形。

(2)

$$\begin{array}{r|l} y' & y'' - \quad 2xy' - \quad 2y \\ & y'' + \quad y' \\ \hline -2xy & \quad (-2x-1)y' - 2y \\ & \quad (-2x-1)y' - 2y \\ \hline \end{array}$$

可知： $y'-2xy=c_2$。

(3) ans： $y=c_1e^{x^2}+c_2e^{x^2}\int e^{-x^2}dx$。

重點35. 高階線性微分方程式

(1) 已知 $y''+p(x)y+q(x)y=0$ 之一齊次解 $\phi_1(x)$，則另一齊次解：

$$\phi_2(x)=\phi_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{[\phi_1(x)]^2}dx$$ 。

(2) 已知 $y''+p(x)y+q(x)y=r(x)$ 之二齊次解 $\phi_1(x),\phi_2(x)$，則另一特別解： $y_p(x)=-\phi_1(x)\int\frac{\phi_2(x)r(x)}{w(\phi_1(x),\phi_2(x))}dx+\ \phi_2(x)\int\frac{\phi_1(x)r(x)}{w(\phi_1(x),\phi_2(x))}dx$ 。

❋注意此二公式之證明與參數變換法的使用。

【精選範例 13】

1.(10%) 試求: $x(x-1)y''-xy'+y=0$ 之通解? 。　【86 清華電機】

【提示】：

(1)由觀察可知，一解爲：x，

(2)另一解令 $\phi_2(x)=\phi_1(x)u(x)$，使用變換參數法，代入原方程式可得：

$$\phi_2(x)=\phi_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{[\phi_1(x)]^2}dx，$$

$$\phi_2(x)=1+x\ln x。$$

(3) ans： $y(x)=c_1x+c_2(1+x\ln x)$

(4) 通解為： $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

【類題】方程式 $xy''+2y'+xy=0$ 之一解為 $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$，試求方程式之通解？

【87 雲科大電子】

【解答】 $y=c_1\dfrac{\sin x}{x}+c_2\dfrac{\cos x}{x}$。

【精選範例 14】

(1)3.(10%) 試求: $y''-3y'+2y=-\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$ 之通解？ 。【86 交大電信】

(2) 試求: $y''+y=\csc x$ 之通解

【提示】：使用積分法求特別解。

(1) ans： $y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^{2x}+(e^x+e^{2x})\ln(1+e^x)$。

(2) ans： $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\sin x\ln\sin x-x\cos x$。

【精選範例 15】

3.(10%) 試求: $x^2y''-2xy'+2y=x^2+4\ln x$ 之通解？ 。

【解答】

(1) 齊性解： $y_h(x) = c_1 x + c_2 x^2$

(2) 特別解：

【解法一】：使用變數變換法 $x = e^t$，求特解：

方程式可化爲 $\dfrac{d^2 y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{2t} + 4t$

使用未定係數法，假設 $y_p(t) = (at+b) + cte^{2t}$，代入求得：

$a = 2, b = 3, = 1$，故

ans： $y_p(x) = x^2 \ln x + 2\ln x + 3$。

【解法二】：使用公式法求特解：

(1)已知 $\phi_1(x) = x, \phi_2(x) = x^2$，

朗司基行列式： $w(x, x^2) = x^2$，代入公式：

$$y_p(x) = -\phi_1(x)\int \frac{\phi_2(x) r(x)}{w(\phi_1(x), \phi_2(x)} dx + \ \phi_2(x)\int \frac{\phi_1(x) r(x)}{w(\phi_1(x), \phi_2(x)} dx$$

$$= x^2 \ln x + 2\ln x - x^2 + 3$$

(2)通解爲： $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

❋同學可看出積分法與自變數轉換法之間所求出的特別解，可能不同，彼此之間可差一個齊性解。

【精選範例 16】

$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^4 e^x$。

【提示】：

(1)先解情性解 $y_h(x)=c_1x+c_2x^2$

(2)利用變換參數法求特解，令 $y_p(x)=xu_1(x)+x^2u_2(x)$，解得

$y_p(x)=e^x(-2x+x^2)$

(3) 通解爲： $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

❋同學應不難明瞭本題不可使用變數變換 $x=e^t$ 求特解。

重點 37. 特徵值問題

由來：偏微分方程式使用分離變數法之後，便形成常微分方程式的特徵值問題。

⁕ 常微分方程式特徵問題的解法，應多加留意。工數考題之特徵值問題，其主要題形如以下例題所示。

【精選範例 1】

試解特徵值問題 ： $y''+\lambda y=0$ ； $y'(0)=y'(2\pi)=0$

【解答】：

(1) 假設特徵值為負實數 $\lambda=-k^2$， $k\neq 0$ ；

$$y''-k^2y=0 \quad \Rightarrow \quad y=c_1\cosh kx+c_2\sinh kx$$

$$\Rightarrow \quad y'=\left[c_1\sinh kx+c_2\cosh kx\right]$$

由 $y'(0) \quad \Rightarrow \quad c_2k=0 \Rightarrow c_2=0$

$$y'(2\pi)=0 \quad \Rightarrow \quad c_1k\sinh 2\pi k=0 \Rightarrow c_1=0$$

得到 y=0 這個不合理的結果，所以特徵值不可能是負實數。

(2) 假設特徵值為零，$\lambda=0$ ；

$$y''=0 \Rightarrow y=c_1+c_2x \Rightarrow y'=c_2$$

由 $y'(0)=0$ 及 $y'(2\pi)=0 \quad \Rightarrow$ 可推知 $c_2=0$，因此 y=1 為特徵函數。

(3) 假設特徵值為正實數，$\lambda=k^2$， $k\neq 0$ ；

$$y''+k^2y=0 \quad \Rightarrow \quad y=c_1\cos kx+c_2\sin kx$$

$$\Rightarrow \quad y'=k\left[-c_1\sin kx+c_2\cos kx\right]$$

由 $y'(0)=0$ 可知$c_2=0$，再由 $y'(2\pi)=0$可知 $\sin kx\, 2nk=0$，

因此 $y=\cos(nx/2)$ ；

(4) 故特徵值爲 $\lambda=\dfrac{n^2}{4}$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$

而特徵函數爲 $y_n=\cos\dfrac{nx}{2}$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$

【精選範例 2】

試解特徵值問題 ： $y''+2y'+\lambda y=0; y(0)=y(1)=0$

【解答】：

(1) $y''+2y'+\lambda y=0$，令解答爲 $y(x)=e^{\lambda x}$，代回方程式得：

$$m^2+2m+\lambda=0 \Rightarrow m=-1\pm\sqrt{1-\lambda}\text{ 。}$$

(2) 假設特徵值：$\lambda=1-k^2$，$k\neq 0$ ；

$$y=e^{-x}\left[c_1\cosh kx+c_2\sinh kx\right]$$

代入邊界條件：$y(0)=y(1)=0$，得到 y=0，所以特徵值不可能是負實數。

(3) 設特徵值：$\lambda=1$ ；

$$y=e^{-x}\left[c_1+c_2x\right]\text{ ，}$$

代入邊界條件：$y(0)=y(1)=0$，因此得到 y=0 這個不合理的結果。

(4) 設特徵值：$\lambda=1+k^2$，$k\neq 0$ ；

$$y=e^{-x}\left[c_1\cos kx+c_2\sin kx\right]$$

由邊界條件 $y(1)=0$可知$c_2e^{-1}\sin k=0$，$\sin k=0\Rightarrow k=n\pi$

5) 故特徵值爲 $\lambda=1+n^2\pi^2$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$

而特徵函數爲 $y_n=e^{-x}\sin(n\pi x)$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$

【精選範例 3】

8.(10%) Find the eigenvalues and eigenfunctions of the following Sturm-Liouville problem

$$y''+\lambda y=0,\ y(0)=0,\ 2y(1)+y'(1)=0$$ 。

【85 成大機械】

【解答】：

(1) 假設特徵值爲負實數 $\lambda=-k^2$，$k\neq 0$ ；

$$y''-k^2y=0 \quad \Rightarrow \quad y=c_1\cosh kx+c_2\sinh kx$$

代入邊界條件：$y(0)=0,\ 2y(1)+y'(1)=0$，此得到 y=0 的結果，所以特徵值不可能是負實數。

(2) 假設特徵值爲零，$\lambda=0$ ；

代入邊界條件，得到 y=0，所以特徵值不可能是 0 。

(3) 假設特徵值爲正實數，$\lambda=k^2$，$k\neq 0$ ；

$$y''+k^2y=0 \quad \Rightarrow \quad y=c_1\cos kx+c_2\sin kx$$

代入邊界條件得：$2c_2\sin k+c_2k\cos k=0\Rightarrow \tan k=k/2$，圖解法解出方程式的根 k_i 。

(4) 故特徵值爲 $\lambda=k_n^{\ 2}$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$

而特徵函數爲 $y_n=\sin k_nx$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$

【精選範例 4】

4.(15%) Find the eigenvalues and eigenfunctions of the following Sturm-Liouville problem

$$(x^{-1}y')'+(\lambda+1)x^{-3}y=0,\ y(1)=0,\ y(e)=0$$ 。

【85 中山機械】

【解答】：

(1) 將方程式展開得： $x^2y''-xy'+(\lambda+1)y=0$，

令解答爲 $y(x)=x^m$，代入方程式可得

$$m^2-2m+(\lambda+1)=0\Rightarrow m=1\pm\sqrt{-\lambda}$$

(2) 假設特徵值爲負實數 $\lambda=-k^2$， $k\neq 0$ ；

$$y=x[c_1\cosh(k\ln x)+c_2\sinh(k\ln x)]$$

代入邊界條件，得到 y=0，所以特徵值不可能是負實數。

(3) 假設特徵值爲零， $\lambda=0$ ；

$$y=x[c_1+c_2\ln x]$$

代入邊界條件，得到 y=0，所以特徵值不可能是 0 。

(4) 假設特徵值爲正實數， $\lambda=k^2$， $k\neq 0$ ；

$$y=x[c_1\cos(k\ln x)+c_2\sin(k\ln x)]$$

代入邊界條件， $c_2\sin k=0\Rightarrow k=n\pi$

(5) 故特徵值爲 $\lambda=n^2\pi^2$， $n=1,2,3,\cdots\cdots$

而特徵函數爲 $y_n=x\sin(n\pi\ln x)$， $n=1,2,3,\cdots\cdots$

重點 38.李建德與貝索方程式

李建德方程式： $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$

(1) 其物物理由來：球座標拉普拉斯偏微分方程式，經由分離變數法，在θ方向，設 $x=\cos\theta$ 所得之方程式，其中 $n=0,1,2,3,\cdots$，$x\in[-1,1]$。

（❋應注意自變數轉換的方程式推導。）

(2) 李建德方程式：$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$，其解爲：

$y(x)=c_1P_n(x)+c_2Q_n(x)$，其中 $Q_n(\pm 1)$ 爲發散，$P_n(\pm 1)$ 爲收斂。

(3) $P_{2n}(x)$：爲偶函數；$P_{2n+1}(x)$：爲奇函數。

貝索方程式： $x^2y''+xy'+(k^2x^2-v^2)y=0$

(1) 其由來爲柱座標拉普拉斯偏微分方程式，經由分離變數法，在半徑（x）方向所得之方程式，其中 $x\geq 0$。

(2) 貝索方程式：$x^2y''+xy'+(k^2x^2-v^2)y=0$，其解爲：

$y=c_1J_v(kx)+c_2Y_v(kx)$

(3) 修正貝索方程式 $x^2y''+xy'+(-k^2x^2-v^2)y=0$，其解爲：

$y=c_1I_v(kx)+c_2K_v(kx)$

❋注意貝索函數與修正貝索函數的圖形。

【精選範例 5】

方程式：$\sin^2\theta\ y''+\sin\theta\cos\theta\ y'+n(n+1)y=0$，設 $x=\cos\theta$，可化成方程式 $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$，其中 $n=0,1,2,3,\cdots$，$x\in[-1,1]$。

【提示】自變數轉換應使用鏈鎖率。（參閱課本 p160,EX:01）

【精選範例 6】

試以兩種方法解 ： $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ 【85 雲技環工】

【方法一】此為 n=1 之 Legendre D.E: $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ 故解為：

$y(x)=c_1p_1(x)+c_2Q_1(x)$ 。

【方法二】由觀察可知 $\phi_1(x)=x$ ，為一解，另一解為 ：

$$\phi_2(x)=x\int\frac{e^{-\int\frac{-2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx=x\int\frac{1}{(1-x^2)x^2}dx$$

$$=x\int\left[\frac{1/2}{1-x}+\frac{1/2}{1+x}+\frac{1}{x^2}\right]dx$$

$$=\frac{x}{2}\ell n\frac{1+x}{1-x}-1$$

【精選範例 7】

1.(5%) 試解 ： $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{9})y=0$ 【86 中央化工】

【解答】：

當 $v=\frac{1}{3}$ ，明顯的解為 ： $y=c_1J_{1/3}(x)+c_2Y_{1/3}(x)$ 或

$y = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)$ 。

重點 39. 史特姆—李奧維爾方程式:

史特姆—李奧維爾(S-L)方程式: $[p(x)y']' + [q(x) + \lambda\rho(x)]y = 0$ ，其中 $p(x), q(x), \rho(x)$ 爲實數函數。

令 $L = \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{d}{dx}\right] + q(x)$ ，S-L 方程式可改寫爲： $Ly = -\lambda\rho y$ 。

S-L 方程式配合以下三種邊界條件：

(1) 齊次型： $\begin{cases} k_1 y'(a) + l_1 y(a) = 0 \\ k_2 y'(b) + l_2 y(b) = 0 \end{cases}$ $(k_i^{\ 2} + l_i^{\ 2} \neq 0)$

(2) 奇異型： $\begin{cases} p(a) = 0 \\ p(b) = 0 \end{cases}$

(3) 週期型： $\begin{cases} p(a) = p(b) \\ y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases}$

其特徵函數在 $x \in [a,b]$ 必正交且爲完整。

對於不比間斷連續差的函數 $f(x)$，用此組特徵函數展開，可得

$f(x) = \sum_{1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$，其中係數的計算爲：

$$c_n = \frac{(f(x), \phi_n(x))}{(\phi_n(x), \phi_n(x))} 。$$

【定理】級數本身具有均值收斂(converge to the mean)的特性。在連續的點，級數學函數學的一模一樣好，在跳躍點的地方級數收斂致函數值的中點。

【精選範例 8】

對於 S-L 程式：$Ly=-\lambda\rho y$，配合 $\begin{cases}k_1 y'(a)+l_1\phi(a)=0\\ k_2 y'(b)+l_2\phi(b)=0\end{cases}$ $(k_i^{\,2}+l_i^{\,2}\neq 0)$， 試證明：

(1)其特徵值為實數。

(2)對應不同特徵值之特徵函數在 $x\in[a,b]$必正交。

【87 中央土木及水利】

【解答(1)】：

(a) 設λ為特徵值，並對應特徵函數 $\phi(x)$，則$\bar{\lambda}$為特徵值，並對應特徵函數 $\bar{\phi}(x)$，

即 $\begin{matrix}[p(x)\phi']'+[q(x)+\lambda\rho(x)]\phi=0\\ [p(x)\bar{\phi}']'+[q(x)+\lambda\rho(x)]\bar{\phi}=0\end{matrix}$ 。（其中 $p(x),q(x),\rho(x)$ 為實數函數。）

(b) $\phi L\bar{\phi}-\bar{\phi}L\phi=(\lambda-\bar{\lambda})\phi\bar{\phi}=\left[p(x)\begin{vmatrix}\phi & \bar{\phi}\\ \phi' & \bar{\phi}'\end{vmatrix}\right]'$（同學們應注意本式之推導），

將上式在 $[a,b]$上做積分，則有 ：

$$\int_a^b(\phi L\bar{\phi}-\bar{\phi}L\phi)\,dx=(\lambda-\bar{\lambda})\int_a^b\phi(x)\bar{\phi}(x)\,dx=p(x)\begin{vmatrix}\phi & \bar{\phi}\\ \phi' & \bar{\phi}'\end{vmatrix}\Bigg|_a^b 。$$

(c) 代入邊界條件，$\begin{cases}k_1 y'(a)+l_1\phi(a)=0\\ k_2 y'(b)+l_2\phi(b)=0\end{cases}$ $(k_i^{\,2}+l_i^{\,2}\neq 0)$，則有

$$\int_a^b(\phi L\bar{\phi}-\bar{\phi}L\phi)\,dx=(\lambda-\bar{\lambda})\int_a^b\phi(x)\bar{\phi}(x)\,dx=p(x)\begin{vmatrix}\phi & \bar{\phi}\\ \phi' & \bar{\phi}'\end{vmatrix}\Bigg|_a^b=0，$$

(d) 因為 $\int_a^b\phi(x)\bar{\phi}(x)\,dx\neq 0$，所以 $\lambda=\bar{\lambda}$，故得證。

【解答(2)】： 對應不同特徵值之特徵函數在 $x\in[a,b]$必正交。請同學自行練習。

❋ 【比較】 實對稱矩陣，其特徵值必爲實數，對應不同特徵值之特徵向量必互相正交。

【證明】

(a) 設 λ 爲特徵值，並對應特徵向量 x，則 $\bar{\lambda}$ 爲特徵值，並對應特徵函數 $\bar{x}$，

即 $\begin{matrix} Ax = \lambda x \\ A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \end{matrix}$ 。（其中 A 爲實對稱矩陣）

(b) $(\bar{x}, Ax) - (x, A\bar{x}) = \bar{x}^T Ax - x^T A\bar{x} = (\lambda - \bar{\lambda})(x, \bar{x})$ ，

將 $(\bar{x}, Ax)$ 取轉置，則有 ： $(\bar{x}^T Ax)^T = x^T A\bar{x}$

即 $\bar{x}^T Ax - x^T A\bar{x} = 0$ 。

(c) $(\bar{x}, Ax) - (x, A\bar{x}) = \bar{x}^T Ax - x^T A\bar{x} = (\lambda - \bar{\lambda})(x, \bar{x}) = 0$，

(d) 因爲 $(x, \bar{x}) \neq 0$，所以 $\lambda = \bar{\lambda}$，故得證。

【精選範例 9】

對於實對稱方陣 A 而言，試證明方程式 (A－λI)y=x 之解向量 y，

可以表示作: $y = \sum_{1}^{n} \frac{a_m}{\lambda_m - \lambda} x^m$ ，

其中 λ_m 爲矩陣 A 對應於特徵向量 x^m 之特徵值，I 爲單位矩陣而 λ 爲某一已知常數 (不是 A 的特徵值)； 並對任意已知向量 x，找出係數 $a_m = ?$

【解答】：

(1) 由於方陣 A 爲實對稱，必存在一組互相垂直的特徵向量，也就是 ： A $x^i = \lambda_i x^i$ ， $i = 1, 2, \cdots, n; (x^i, x^j) \begin{cases} = 0 若 i \neq j \\ \neq 0 若 i = j \end{cases}$

(2) $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ 可形成一組基底，故恆有 ：

$y = c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n; c_1, c_2, \cdots c_n \in R$

將以上之 y 代入方程式$(A-\lambda I)y=x$ 中，而得 ：

$$(A-\lambda I)y = (A-\lambda I)(c_1x^1 + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n)$$

$$= (c_1\lambda_1x^1 + c_2\lambda_2x^2 + \cdots + c_n\lambda_nx^n) - (c_1\lambda x^1 + c_2\lambda x^2 + \cdots + c_n\lambda x^n)$$

$$= c_1(\lambda_1-\lambda)x^1 + c_2(\lambda_2-\lambda)x^2 + \cdots + c_n(\lambda_n-\lambda)x^n = x$$

(3) 將上式二邊與向量 x^m做內積，可以得到 ：

$$c_m(\lambda_m-\lambda)(x^m, x^m) = (x, x^m) \Rightarrow c_m = \frac{(x, x^m)}{(\lambda^m-\lambda)(x^m, x^m)}$$

因此若取 $a_m = \dfrac{(x, x^m)}{(x^m, x^m)}$ ，則有 $y = \sum_1^n c_m x^m = \sum_1^n \dfrac{a_m}{\lambda_m - \lambda} x^m$ ，

故得證。

❋ 若常數λ等於特徵值，則特徵向量展開法，可能導致無解或無限多解，同學們應切實明白此限制。

❋❋ 【比較】 函數空間之特徵函數展開法的觀念，與向量空間是完全相同的，。

【精選範例 10】

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

(a) Find the eigenvalue of A.(3%)

(b) Find the corresponding unit magnitude eigenvetors of A.(10%)

(c) Find all the possible solutions of the column matrix of x for

$$Ax = \alpha I x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

where $\alpha \in R$。

【86 台大土木】

【解答】：

(1) 特徵值爲：$\lambda = 2,2,-1$

(2) 特徵向量：$\{y_1, y_2, y_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$，故對應之單位特徵向量

爲：$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{4} \end{bmatrix}$。（本題之特徵向量並不正交，但線性無關。）

(3) 本題應由 Cramer's rule 討論解之存在與否，但給定之形式與特徵向量符合，故仍假設 x 爲特徵向量的組合，

即 $x = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3$，

代入 $Ax = \alpha I x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$，得

$$(2-\alpha)a_1 y_1 + (2-\alpha)a_2 y_2 + (-1-\alpha)a_3 y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = y_3,$$

比較等號的兩邊可輕易發現：

(i) $\alpha = -1$，方程式無解；

(ii) $\alpha = 2$，$x = a_1 y_1 + a_2 y_2 - \frac{1}{3} y_3$；

(iii) $\alpha \neq -1$ 且 $\alpha \neq 2$， $x = -\dfrac{1}{1+\alpha} y_3$

【精選範例 11】

對於 $y^{(4)} = -\lambda y$，配合 $\begin{cases} y''(a) = 0, & y(a) = 0 \\ y''(b) = 0, & y(b) = 0 \end{cases}$， 試證明

對應不同特徵值之特徵函數在 $x \in [a,b]$ 必正交。 【84 交大機械】

【解答】：

(1) 設 λ_m, λ_n 爲特徵值，並對應特徵函數 $\phi_m(x), \phi_n(x)$ 即 $\begin{matrix} \phi_m^{(4)} = -\lambda\phi_m \\ \phi_n^{(4)} = -\lambda\phi_n \end{matrix}$ 。

(2) $\phi_m L\phi_n - \phi_n L\phi_m = \phi_m\phi_n{}^{(4)} - \phi_n\phi_m{}^{(4)} = (\lambda_m - \lambda_n)\phi_m\phi_n$

$$\begin{aligned}
\phi_m\phi_n{}^{(4)} - \phi_n\phi_m{}^{(4)} &= \begin{vmatrix} \phi_m & \phi_n \\ \phi_m^{(4)} & \phi_n^{(4)} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \phi_m & \phi_n \\ \phi_m''' & \phi_n''' \end{vmatrix}' - \begin{vmatrix} \phi_m' & \phi_n' \\ \phi_m''' & \phi_n''' \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \phi_m & \phi_n \\ \phi_m''' & \phi_n''' \end{vmatrix}' - \left(\begin{vmatrix} \phi_m' & \phi_n' \\ \phi_m'' & \phi_n'' \end{vmatrix}' - \begin{vmatrix} \phi_m'' & \phi_n'' \\ \phi_m'' & \phi_n'' \end{vmatrix} \right) \\
&= \begin{vmatrix} \phi_m & \phi_n \\ \phi_m''' & \phi_n''' \end{vmatrix}' - \begin{vmatrix} \phi_m' & \phi_n' \\ \phi_m'' & \phi_n'' \end{vmatrix}'
\end{aligned}$$

（同學們應注意本式之推導）

(3) 將上式在 $[a,b]$ 上做積分，則有 ：

$$\int_a^b \phi_m\phi_n{}^{(4)} - \phi_n\phi_m{}^{(4)} dx = \left(\begin{vmatrix} \phi_m(x) & \phi_n(x) \\ \phi_m'''(x) & \phi_n'''(x) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \phi_m'(x) & \phi_n'(x) \\ \phi_m''(x) & \phi_n''(x) \end{vmatrix} \right) \Bigg|_a^b 。$$

$$= (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \phi_m\phi_n dx$$

(4)　代入邊界條件，$\begin{cases} y''(a)=0, & y(a)=0 \\ y''(b)=0, & y(b)=0 \end{cases}$則有

$$\left(\begin{vmatrix} \phi_m(x) & \phi_n(x) \\ \phi_m'''(x) & \phi_n'''(x) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \phi_m'(x) & \phi_n'(x) \\ \phi_m''(x) & \phi_n''(x) \end{vmatrix} \right) \Bigg|_a^b = 0，$$

(5)　由第(3)式，因爲$\lambda_m \neq \lambda_n$，所以$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0$，故得證。

✸ 由上題的證明，應可明白考題中特徵值問題不應僅限於二階，必含有高階特徵值問題如以下之範例。同學們是否可自行解答以下的問題。

【精選範例 12】

對於 $y^{(4)} = -\lambda y$，配合$\begin{cases} y''(0)=0, & y(0)=0 \\ y''(\ell)=0, & y(\ell)=0 \end{cases}$， 試解此特徵值問題。

【成大環工】

【提示】：

(1) 本題應分成三個區間

$(a)\lambda = k^4$

$(b)\lambda = 0$，

$(c)\lambda = -k^4$

分別討論方程式的解。

(2) 代入邊界條件，得

特徵值：$\lambda = \left(\dfrac{n\pi}{\ell}\right)^4$，$n = 1,2,3,\cdots$

特徵函數 $\{\sin\frac{n\pi x}{\ell}\}$，$n=1,2,3,\cdots$

重點36. 線性微分方程式於物理與工程上之應用

(1) 常微分方程於物理與工程上之應用：

- 質量、能量守恆率之問題(conservation law)。
- 機械振動問題、自然頻率、共振、beating。
- 電容、電感、電阻之電路。
- 正交軌道、阻力問題、衰變問題、CSTR(continuous stirred tank reactor)、單擺問題。

(2) 偏微分方程於物理與工程上之應用：

- 質量、能量擴散之問題－擴散方程式。
- 機械振動問題－波動方程式。
- 樑振動問題－ $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^4}$ 。
- 穩態擴散問題－拉普拉斯方程式。

微分方程是爲了研究自然現象與物理問題而產生的，但欲將實際問題予以數學化，其間之牽涉甚廣，其要點在於：

(1) 釐清問題中之自變量與因變量。

(2) 座標系統（變數的選定）之選擇。一般選擇卡氏直角座標，但也可因爲物理問題的需要，選擇其它廣義座標系。

(3) 應用有關問題之現象與定律。如：守恆律、運動定律、電路學等。

(4) 方程式的建立。(尤其在常微分方程)

(5) 邊界條件與初始條件的建立。(尤其在偏微分方程)

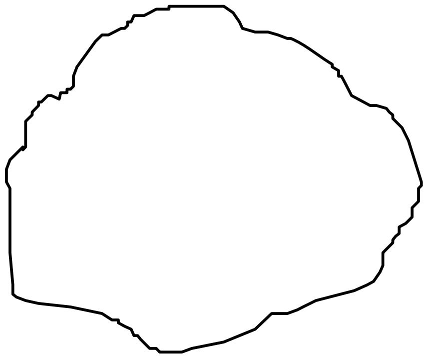
工數考題中出現微分方程式的應用問題，需要用到的性質多半只是簡單的物理現象，然而將實際問題轉換成微分方程式，中間的過程卻頗富彈性，並無一嚴格之標準，同學們有時反而覺得棘手，

因而進退失據。除了以上重點提示外，唯有詳實研究此類型問題，培養信心，唯其熟練而已。

(一) 質量、能量守恆率之問題(conservation law)

質量、能量守恆率為微分方程式經常出現的問題，就以下二常見物理問題為例，說明方程式的推導與建立：

(A)空間中之一流場，其速度分佈為 $\vec{v}(x,y,z,t)$，流體之溫度分佈為 $T(x,y,z,t)$，假設流場為不可壓縮且無黏滯性，推導能量方程式。



【分析】

(1)取流場中一固定於空間之體積(control volume) V，則

V 中之流體總熱量為：$\iiint_V \rho c T\,dv$，

（ρ：密度，c：比熱，T：溫度）

(2)進出 V 表面之流體總熱量為：

$$-\oint\!\!\oint_S \vec{q}\cdot\hat{n}dA-\oint\!\!\oint_S(\rho cT)\vec{v}\cdot\hat{n}dA,$$ (取<u>流出之方向為負號。</u>)

（$\vec{q}$：進出表面的熱量，$\hat{n}$：曲面之法向量）

(3)根據能量守恆律：

(V 中流體之熱量變化)=(進出 V 表面流體之熱量總和)，

即 $\dfrac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho cT\,dv=-\oint\!\!\oint_S \vec{q}\cdot\hat{n}dA-\oint\!\!\oint_S(\rho cT)\vec{v}\cdot\hat{n}dA$。

(4)再根據高斯散度定理，將面積分代換為體積分，

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho cT\,dv=-\oint\!\!\oint_S \vec{q}\cdot\hat{n}dA-\oint\!\!\oint_S(\rho cT)\vec{v}\cdot\hat{n}dA=-\oint\!\!\oint\!\!\oint_V\left[\nabla\cdot\vec{q}+\nabla\cdot\left(\rho cT\vec{v}\right)\right]dv\Rightarrow$$

$$\oint\!\!\oint\!\!\oint_V\left[\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\rho c(\vec{v}\cdot\nabla)T\right]dv=-\oint\!\!\oint\!\!\oint_V\nabla\cdot\vec{q}\,dv$$

(5)假定流體爲不可壓縮流，即ρ=常數，於是ρ對時間與空間之微分值皆爲零，則連續方程式成爲：$\nabla\cdot\vec{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$。

(6)假定熱量的擴散遵守Fourier Law：$\vec{q}=-k\nabla T$，代回上式，

$$\oiiint_V\left[\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\rho c(\vec{v}\cdot\nabla)T\right]dv=\oiiint_V k\nabla^2 T dv$$

(7)V爲流場中任意固定於空間之體積，故對空間中之任意點，上式之積分核必爲零，可導出熱傳方程式的微分形式，故

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\rho c(\vec{v}\cdot\nabla)T=k\nabla^2 T \text{，或}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)T=a^2\nabla^2 T,\ (a^2=\frac{k}{\rho c})\\&\frac{\partial T}{\partial t}+\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)\end{aligned},$$

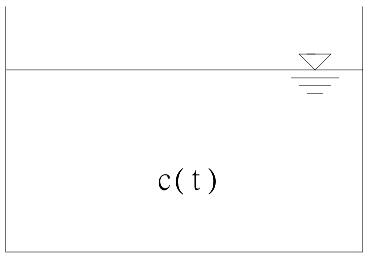
$\frac{\partial T}{\partial t}$：稱爲空間變化項，$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}$：稱爲傳輸項(transport term)，$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$：稱爲擴散項(diffusion term)。

(8)若選定的空間區域爲一固體，流動速度 $u=v=w=0$，則能量方程式成爲工數之標準擴散方程式：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\nabla^2 T\\&\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)\end{aligned}。$$

（B）再舉一個質量守恆的問題爲例：

一化學反應容器，其總體積爲$V(t)$，容器內含某化學物質之濃度



爲 $c(t)$。今有一外界流量 $q_{in}(t)$流入容器中，其所含之化學物質之濃度爲 $c_{in}(t)$，而容器中有一流出之流量 $q_{out}(t)$，其所含之化學物質之濃度爲 $c(t)$，求 $c(t)$之統御方程式(governing equation)？

【分析】

(1) 根據質量守恆定律：

(V中之化學物質之質量變化)=(進出 V表面之質量總和)，

$$\frac{d}{dt}\left[V(t)c(t)\right]=\frac{dV(t)}{dt}c(t)+V(t)\frac{dc(t)}{dt}=q_{in}(t)c_{in}(t)-q_{out}(t)c(t)$$ 。

(2) 又總體積：$V(t)=V_0+\int_0^t\left[q_{in}(\tau)-q_{out}(\tau)\right]d\tau \Rightarrow \frac{dV(t)}{dt}=q_{in}(t)-q_{out}(t)$，

代回原方程式可得：

$$\frac{dV(t)}{dt}c(t)+V(t)\frac{dc(t)}{dt}=\left[q_{in}(t)-q_{out}(t)\right]c(t)+V(t)\frac{dc(t)}{dt}=q_{in}(t)c_{in}(t)-q_{out}(t)c(t)$$

即：$V(t)\frac{dc(t)}{dt}+q_{in}(t)c(t)=q_{in}(t)c_{in}(t)$，

(3) 此爲一階線性常微分方程式，可用公式解解之。

☆【精選範例 1】

一個圓柱形的水塔其半徑爲R，高度爲h_0，而塔之下方有一圓孔，半徑爲r，今欲將滿水位水塔中的水由圓孔排出至淨空，需要多少時間。（註：設圓孔水之流速爲 $v=a\sqrt{h}$）　【83 台大工工】

【解答】：

(1) 水塔之容量：　$V(t)=\pi R^2 h(t)$，【設定變數】

(2) 水塔容量之變化：　$\frac{dV}{dt}=\pi R^2\frac{dh}{dt}=-\pi r^2 v=-a\pi r^2\sqrt{h}$ ，【守恆率】

因此， $\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{ar^2\sqrt{h}}{R^2}\Rightarrow h(t)=\left[c-\dfrac{(r/R)^2at}{2}\right]^2$，

(3) 代入初始條件 $h(0)=h_0$，則

$h_0=c^2$， $h(t)=\left[\sqrt{h_0}-\dfrac{(r/R)^2at}{2}\right]^2$，

(4) 設水至塔中完全排出的時間爲 T，即 $h(T)=0$，則可解出：

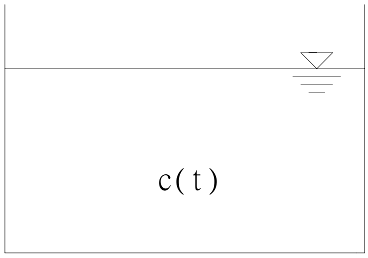
$T=\dfrac{2\sqrt{h_0}}{a}(\dfrac{R}{r})^2$ 。

☆【精選範例 2】

A dammed lake holds initially V_0 gallons of water. Due to contamination, the concentration of the pestside is equal to c_0 ppm ($c_0\times 10^{-6}$). A river continuous to flow into the lake q_{in} gal/min with pestside concentraton c_{in} ppm. The flow of the water over the dam is controlled at q_{out} gal/min. Assume the perfect mixing, the pollutents are uniformed distributed thtoughout the lake at anytime. How long will it before the water reaches an acceptable level of concentration equal to c_{acc}.

【83 交大電信】

【解答】：



(1) 假設湖中殺蟲劑之濃度爲 $c(t)$ ppm，

【設定變數】

(2) 湖中水之總體積 $V(t)=V_0+(q_{in}-q_{out})t$ gallons， (1)

湖中化學物質之變化爲：

$$\frac{d}{dt}\left[V(t)c(t)\times 10^{-6}\right]=q_{in}c_{in}\times 10^{-6}-q_{out}c\times 10^{-6} \text{【守恆率】} \qquad (2)$$

(3) 將(1)代入(2)，方程式變成：

$$\left[V_0+(q_{in}-q_{out})t\right]\frac{dc}{dt}+(q_{in}-q_{out})c=q_{in}c_{in}-q_{out}c,$$

$$\left[V_0+(q_{in}-q_{out})t\right]\frac{dc}{dt}=q_{in}(c_{in}-c)$$

(4) 使用分離變數法，

$$\frac{dc}{c-c_{in}}=\frac{-q_{in}}{V_0+(q_{in}-q_{out})t}dt$$

$$\int\frac{dc}{c-c_{in}}=\int\frac{-q_{in}}{V_0+(q_{in}-q_{out})t}dt+k$$

$$\ln(c-c_{in})=\frac{-q_{in}}{q_{in}-q_{out}}\ln\left[V_0+(q_{in}-q_{out})t\right]+k$$

(5) 代入初始條件 t=0，$c(0)=c_0$，

$$k=\frac{q_{in}}{q_{in}-q_{out}}\ln V_0+\ln(c_0-c_{in})$$ 。

(6) 假設經過 T 分鐘之後，湖中殺蟲劑之濃度達到 c_{acc}：

$$\ln\left(c_{acc}-c_{in}\right)=\frac{q_{in}}{q_{out}-q_{in}}\ln\left[V_0+\left(q_{in}-q_{out}\right)T\right]-\frac{q_{in}}{q_{out}-q_{in}}\ln V_0+\ln(c_0-c_{in})$$

T 即為所求。

若 V_0=108，q_{in}=300，$c_{in}=5\times10^{-6}$，q_{out}=400，c_{acc}=15，則

T=306638.7sec 。

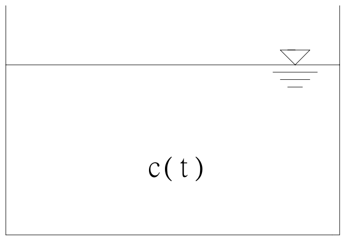
☆【精選範例 3】

The derivation of the time varient (nonsteady state) materials balance equation for a complete mixed reactor can be consider the reactor shown in the following figure.(V :volume of the reactor, the flowrate of inflow and out flow is equal to q, and the concentration of inflow is equal to c_0.)

(a) Write down the govering equation of the reactive constitutent concentraton for this system. Assume the rate of reaction is defined as γ_c=-kc.

(b) Sove the mass balance equation in (a). 【83 交大環工、成大環工】

【解答】：



(a) 假設反應器中反應物之濃度爲 c(t)，

根據連續方程式：

$$V\frac{dc}{dt}=qc_0-qc-Vkc$$

$$\frac{dc}{dt}+(q/V+k)c=qc_0/V$$ 。

(b) 本題爲一階線性常微分方程式，其解爲：

$$c(t)=e^{-(q/V+k)t}\int e^{(q/V+k)t}\frac{q}{V}c_o dt+c_1e^{-(q/V+k)t}$$

$$=\frac{qc_0}{q+kV}+c_1e^{-(q/V+k)t},(c_1\in R)$$

☆【精選範例 4】

一連續非穩態(non-steady)之化學反應槽系統，槽 1 與槽 2 之化學物質之濃度分佈分別爲$c_1(t)$與$c_2(t)$，注入與流出之流量皆等於q，如下圖所示。t=0 時$c_1(0)$=$c_2(0)$=0，在

(a) 不考慮化學反應的情況下，

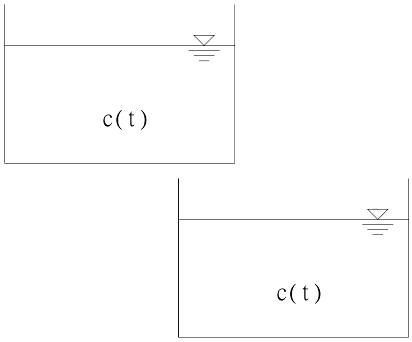
(b) 加入化學反應之後，($\gamma_c=-kc$)

請分別求出槽 1 與槽 2 之化學物質之濃度分佈$c_1(t)$，$c_2(t)$= ?

【解答】：

(1) 無化學反應，則

$$\begin{cases} V_1 \dfrac{dc_1}{dt} = qc_{in} - qc_1 \\ V_2 \dfrac{dc_2}{dt} = qc_{c_1} - qc_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{dc_1}{dt} + \dfrac{q}{V_1} c_1 = \dfrac{q}{V_1} c_{in} \\ \dfrac{dc_2}{dt} + \dfrac{q}{V_2} c_2 = \dfrac{q}{V_2} c_1 \end{cases}$$

(2)取拉氏轉換，

$$C_1(s) = \frac{qc_{in}/V_1}{(s+q/V_1)s} = c_{in}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+q/V_1}\right)$$

$$C_2(s) = \frac{qC_1(s)/V_2}{s+q/V_2} = c_{in}\left(\frac{q/V_2}{s+q/V_2}\frac{q/V_1}{(s+q/V_1)s}\right) = c_{in}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+q/V_1}\frac{V_1}{V_1-V_2} - \frac{1}{s+q/V_1}\frac{V_2}{V_2-V_1}\right)$$

(3) 取拉反氏轉換，

$$c_1(t) = c_{in}\left[1 - \exp(-\frac{q}{V_1}t)\right]$$

$$c_2(t) = c_{in}\left[1 - \frac{V_1}{V_1-V_2}\exp(-\frac{q}{V_1}t) - \frac{V_2}{V_2-V_1}\exp(-\frac{q}{V_2}t)\right]$$

(4) 計入化學反應，則

$$\begin{cases} V_1 \dfrac{dc_1}{dt} = qc_{in} - qc_1 - kc_1 \\ V_2 \dfrac{dc_2}{dt} = qc_{c_1} - qc_2 - kc_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dc_1}{dt} + (k + \dfrac{q}{V_1})c_1 = \dfrac{q}{V_1} c_{in} \\ \dfrac{dc_2}{dt} + (k + \dfrac{q}{V_2})c_2 = \dfrac{q}{V_2} c_1 \end{cases}$$

(5) 取拉氏轉換，

$$C_1(s)=\frac{qc_{in}/V_1}{(s+k+q/V_1)s}=c_{in}\left(\frac{1}{s}\frac{q/V_1}{k+q/V_1}-\frac{1}{(s+k+q/V_1)}\frac{q/V_1}{k+q/V_1}\right)$$

$$C_2(s)=\frac{qC_1(s)/V_2}{s+k+q/V_2}=c_{in}\left(\frac{q/V_2}{(s+k+q/V_2)}\frac{q/V_1}{(s+k+q/V_1)s}\right)$$

$$=c_{in}\left(\frac{1}{s}\frac{(q/V_1)(q/V_2)}{(k+q/V_1)(k+q/V_2)}-\frac{1}{(s+k+q/V_1)}\frac{q}{(V_1-V_2)(k+q/V_1)}-\frac{1}{(s+k+q/V_2)}\frac{q}{(V_2-V_1)(k+q/V_2)}\right)$$

(6) 取拉反氏轉換，

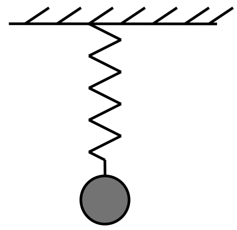
$$c_1(t)=\frac{qc_{in}/V_1}{k+q/V_1}\left[1-\exp(-\frac{q}{V_1}t)\right]$$

$$c_2(t)=c_{in}\left[\frac{q^2/V_1V_2}{(k+q/V_1)(k+q/V_2)}-\frac{q}{(V_1-V_2)(k+q/V_1)}\exp\left(-(k+\frac{q}{V_1})t\right)-\frac{q}{(V_2-V_1)(k+q/V_2)}\exp\left(-(k+\frac{q}{V_2})t\right)\right]$$

Note：本題作答時，應先做(b)，再將(b)之結果令 k=0，而得到(a)。

☆【精選範例 5】

求下列無阻尼彈簧系統之位移 $y(t)$：



$my''+ky=F\cos\omega t$ ，

I.C. $y(0)=y'(0)=0$ 。

並解釋何謂“Resonance”與“beating”？【82 台大造船、交大機械】

【解答】：

(a) 先將方程式寫成 $y''+\frac{k}{m}y=\frac{F}{m}\cos\omega t\Leftrightarrow y''+{\omega_0}^2y=f\cos\omega t$ 。

求齊次解： $y_h(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t$ 。

(b) 求特別解 y_p：

(1) $\omega \neq \omega_0, y_p(t) = \mathrm{Re}[ae^{i\omega t}]$，代回原方程式：

$$(-\omega^2 + {\omega_0}^2)a = f \Rightarrow a = \frac{f}{{\omega_0}^2 - \omega^2}$$ 。

故通解：$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t + \dfrac{f}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\cos\omega t$，

(2) 代初始條件：$y(0) = y'(0) = 0$，$y(t) = \dfrac{f}{{\omega_0}^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)$。

(3) 當 $\omega = \omega_0$，令 $y_p(t) = \mathrm{Re}[ate^{i\omega_0 t}]$，代回原方程式：

$$(-{\omega_0}^2 t + 2i\omega_0 + {\omega_0}^2 t)a = f \Rightarrow a = \frac{f}{2i\omega_0}$$ 。

通解：
$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t + \mathrm{Re}[\frac{f}{2i\omega} e^{i\omega_0 t}] \\ &= c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t + \frac{ft}{2\omega_0}\sin\omega_0 t \end{aligned}$$ ，

(4) 代初始條件：$y(0) = y'(0) = 0$，$y(t) = \dfrac{ft}{2\omega_0}(\sin\omega_0 t)$。

❋當外加的震動頻率與系統本身的自然頻率一樣時，時間 $t \to \infty$，振幅將 $\to \infty$，稱爲共振“Resonance”。

❋當外加的震動頻率與系統本身的自然頻率接近時，系統之振福會有忽大忽小的現象稱之爲拍“beating”。

☆【精選範例 6】

Spring-mass-damper system :

$my'' + cy' + ky = F\cos\omega t$，

(a) where m, c, k, F_0 are positive constant, and $\omega > 0$. In the general solution which term is the steady-state solution ?

(b) The Amplitude if particular solution is a funcion of ω. Please determine the value of ω such that the amplitude of particular solution becomes a maximum.

【台大機械　、台大農機、交大環工、清大動機、中興機械】

【解答】：

先將方程式寫成

$$y''+\frac{c}{m}+\frac{k}{m}y=\frac{F}{m}\cos\omega t \Leftrightarrow y''+2\zeta+\omega_0{}^2 y=f\cos\omega t$$ 。

(a) 求齊次解 $y_h(t)=e^{\lambda t}$，輔助方程式為：

$$\begin{aligned}&\lambda^2+2\zeta\lambda+\omega_0{}^2=0\\&\lambda_{1,2}=-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-\omega_0{}^2}\end{aligned}$$ 。

(1) $\zeta^2-\omega_0{}^2\neq 0$

$$y_h(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$$ 。

(2) $\zeta^2-\omega_0{}^2=0\Rightarrow\lambda=\lambda_1=\lambda_2=-\zeta$

$$y_h(t)=c_1e^{\lambda t}+c_2te^{\lambda t}$$ 。

(b) 求特別解 $y_p(t)=\mathrm{Re}[ae^{i\omega t}]$，代回原方程式：

$$(-\omega^2+2i\zeta\omega+\omega_0{}^2)a=f$$

$$a=\frac{f}{(\omega_0{}^2-\omega_0{}^2)+2i\zeta\omega}=\frac{f\left[(\omega_0{}^2-\omega_0{}^2)-2i\zeta\omega\right]}{(\omega_0{}^2-\omega_0{}^2)^2+4\zeta^2\omega^2}$$ 。

$$\begin{aligned}y_p(t)&=\mathrm{Re}[ae^{i\omega t}]\\&=\frac{f}{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega^2}\left[(\omega_0{}^2-\omega^2)\cos\omega t+2\zeta\omega\sin\omega t\right]\\&=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega^2}}\sin(\omega t+\phi)\end{aligned}$$

其中相位角 $\phi=\tan^{-1}\dfrac{\omega_0{}^2-\omega^2}{2\zeta w}$，振幅為 $f(\omega)=\dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega^2}}$ 。

$y_h(t)$：為暫態項，$y_p(t)$：為穩態解。

最大振幅發生在 $\dfrac{df(\omega)}{d\omega}=0$，解得 $\omega=\sqrt{\omega_0{}^2-2\zeta^2}$ 。

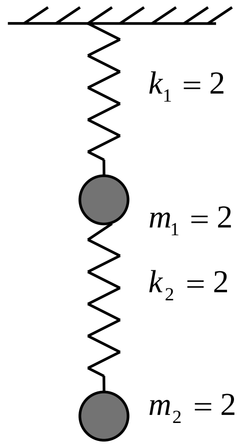
☆【精選範例 7】

右圖所示之運動，

（無重力，不計彈簧之質量），

初始條件為： $x_1(0)=1,\ x_2(0)=2,\ \dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$

$k_1=2,\ m_1=2,\ k_2=2,\ m_2=2$



(a) 求出此一結構系統之基本振態積特徵頻率。

(b) 求解位移 $x_1(t)=?,\ x_2(t)=?$ 【87 中央土木】

【解答】：

(1) 先將方程式寫出：

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+k_1x_1-k_2(x_2-x_1)=0 \\ m_2\ddot{x}_2+k_2(x_2-x_1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1+2x_1-x_2=0 \\ \ddot{x}_2+x_2-x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0$$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$之特徵值與特徵向量為：

$$\lambda_{1,2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2},x^{1,2}=\begin{bmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 \end{bmatrix}。$$

(3) 令 $x=py$

代入 $\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0$，可得 $\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=0$，

解得 $\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1\cos w_1t+c_2\sin w_1t \\ c_3\cos w_2t+c_4\sin w_2t \end{bmatrix}$。

故 $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=py=\begin{bmatrix} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1\cos w_1t+c_2\sin w_1t \\ c_3\cos w_2t+c_4\sin w_2t \end{bmatrix}$

(4) 本題之自然頻率為： $\omega_{1,2}=\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2}=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}},\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ，

基本振態為： $\begin{bmatrix}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\-1\end{bmatrix}$。

(5) 代入初始條件： $x_1(0)=1, x_2(0)=2, \dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ ，

$c_1=1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}, c_2=0, c_3=1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, c_4=0$ 。

(二) 電路學之問題

☆【精選範例 8】

考慮一個 R-L-C 電路，外加電動勢為：$E(t)$，請寫下系統的方程式。

【83 交大機械、82 交大電子】

【解答】： $i=\dfrac{dq}{dt}=\dot{q}$，各元件之電壓降為：

(1) 電容 (Capacitor) ： $q=CV$， $V=q/C$

(2) 電阻 (Resistor) ： $V=iR=\dot{q}$R

(3) 電感 (Inductor) ： $V=L\dfrac{di}{dt}=L\ddot{q}$

(4) 根據 (Kirchoff's first theorem：任何封閉迴路之電壓降必為零。)

$L\ddot{q}+R\dot{q}+\dfrac{q}{C}=0$。

☆【精選範例 9】

電路圖如下，V=60volts，

(a) t=0 時，將開關合上，此時電路中之電流與電荷均為零，求此

電路系統之解答？

(b) 求 $\lim_{t\to\infty} i_1(t)=?, \lim_{t\to\infty} i_2(t)=?$【84 中正電機】

【解答】：

(1) 根據柯希和夫定律：

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt}+(i_1-i_2)R_1=60u(t) \\ (i_2-i_1)R_1+\dfrac{1}{C}\int_0^t i_2(t)dt+i_2R_2=0 \end{cases}$$

，L=5，R_1=20，R_2=30，C=0.05，故

有：$$\begin{cases} \dfrac{di_1}{dt}+4i_1-4i_2=12u(t) \\ -2i_1+2\int_0^t i_2(t)dt+5i_2=0 \end{cases}$$，

(2) 將方程式，取拉氏轉換，

$$\begin{cases} (s+4)I_1(s)-4I_2(s)=12/s \\ -2I_1(s)+(2/s+5)I_2(s)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1(s)=\dfrac{60s+24}{s(5s+4)(s+2)} \\ I_2(s)=\dfrac{24}{(5s+4)(s+2)} \end{cases}$$ 。

(3) 取部份分式 $I_1(s)=\dfrac{3}{s}+\dfrac{5}{s+4/5}-\dfrac{8}{s+2}$ ，

(4) 取拉氏反轉換，$i_1(t)=3u(t)+5e^{-4t/5}-8e^{-2t}$ ，

代回聯立方程式，可得

$i_2(t)=4e^{-4t/5}-4e^{-2t}$ 。

【類似問題】

1. 設計一個汙水抽水站之溼井(wet well) 時，汙水之最大流量爲 Q_{max}，平均流量爲Q_{av}，最小流量爲Q_{min}，且抽水機開啓時的平均抽水量爲D。試列出式子表示抽水機從開始開啓至下一次開啓之週期時間 (cycle time)爲何？又，在何種污水流量的情況下所得之週期時間爲最短？（註：設污井之容量爲V。）【83 台大環工】

答： (1) 週期 $\dfrac{V}{D-Q_{av}}+\dfrac{V}{Q_{av}}$ ，

(2) $D=2Q_{av}$時，所得之週期為最短。

2. 實驗顯示潮濕性多孔物質在開放空間中，其散失水份的速率與本身所含的水量成正比。如果有一天這種材料懸掛在通風良好的空中，第一小時即散失掉其所含水份的一半，試問散失其所含水份的 99.9%需時若干？散失其所含全部的水份又需時若干？根據以上的二個答案，討論實際值與完全風乾值於應用上的差別？【83 台大農機】

答： (1) $\log_2(1000)$；

(2) 完全風乾需要無限長的時間；

(3) 由於完全風乾需要無限長的時間， 故實際應用上常取一定值代表完全風乾，例如：散失其所含水份的 99.9%的時間為實際應用上的風乾時間。

3. A mass--damper system is shown in figure. Let the masses m1=m2=m3=1, and the damper coefficients c1=c2=1, The motion of the system thus can be expressed as

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \dot{y}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f_1\\ 0\\ f_3\end{bmatrix},$$

where y_1,y_2,y_3 are the vertical velocity of the m_1,m_2 and m_3 respoectively.

(1) Find the eigenvalues and the eigenvectors of the system.

(2) Give the bf PHYSICAL meaning of bf EACH eigenvalues and corresponding eigenvectors of the system. 【83 清大動機】

答：(1) $\lambda=0,-1,-3$, the corresponding eigenvectors are $\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$。

(2) $\lambda=-1,-3$ 代表系統為穩定(stable)，此振動模態 (mode shape) 之振幅隨時間增加而減小，$\lambda=0$ 代表系統為臨界(critical stable)

穩定，此振動模態(mode shape)之振幅不隨時間增加而改變。

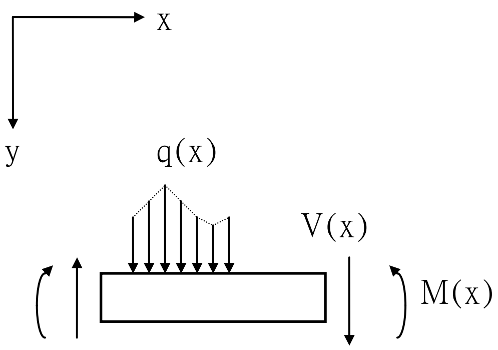
4。一放射性物質衰變之速率與本身之質量成正比，若該物質於一小時內有 10% 的質量發生變化，則該物質之半衰期（50%的質量發生變化）爲若干小時？【82 中央土木】

答：$\dfrac{\ln 0.5}{\ln 0.9}$。

（三）有關樑的一些問題

(A) 靜態負載

尤拉樑靜態負載之方程式為：



(1) $EIy''=-M(x)$

(2) $EIy'''=-V(x)$

(3) $EIy^{(4)}=q(x)$

（注意符號與座標系的取法）

(B) 振動問題

尤拉樑之動態振動方程式為：

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=q(x)$$

（詳見偏微分方程式）

❋❋有關邊界條件的一些討論：

(1) 固定端（懸臂樑）：　$y(0)=0,\ y'(0)=0$，

(2) 自由端：　$y''(0)=0,\ y'''(0)=0$，

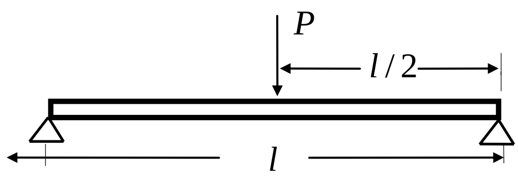
(3) 鉸支(hinged)端：　$y(0)=0,\ y''(0)=0$。

☆【精選範例 1】

樑之受力圖如右，

(a) 求解答 $y(x)=?$

(b) 求左端點之轉角。



【解答】：

(1)原點取在樑之左端點。

(2)方程式： $EIy''' = -V(x) = \frac{-P}{2}$ ， $(0 < x < l/2)$

邊界條件： $y(0) = y''(0) = 0, y'(l/2) = 0$ 。

(3)將方程式積分三次：

$$y(x) = \frac{P}{EI}\left(\frac{-x^3}{12} + c_2 x^2 + c_1 x + c_0\right)$$

(4)代入邊界條件： $y(0) = y''(0) = 0, y'(l/2) = 0$ ，得

$$c_0 = c_2 = 0, c_1 = \frac{L^2}{16} \text{ ，}$$

即 $y(x) = \frac{P}{EI}\left(\frac{-x^3}{12} + \frac{xL^2}{16}\right)$ ， $(0 < x < l/2)$ 。

(5)轉角 $\theta(0) = \frac{dy}{dx} = \frac{PL^2}{16}$ 。

【另解】：

(1)方程式： $EIy^{(4)} = q(x) = P\delta(x - l/2)$

邊界條件： $y(0) = y''(0) = 0, y(l) = y''(l) = 0$ 。

(2)將方程式取拉氏轉換求解：

$$Y(s) = \frac{1}{s^4}\left[s^3 y(0) + s^2 y'(0) + sy''(0) + y'''(0) + \frac{Pe^{-\frac{ls}{2}}}{EI}\right]$$

$$= \frac{1}{s^4}\left[s^2 y'(0) + y'''(0) + \frac{Pe^{-\frac{ls}{2}}}{EI}\right]$$

取反轉換：

$$y(x) = \frac{P}{EI}\left[\left(c_3 x^3 + c_1 x\right) + \frac{(x - l/2)^3}{6} u\left(x - \frac{l}{2}\right)\right]$$

(3)代入邊界條件： $y(l) = y''(l) = 0$ ，得

$$c_3 = \frac{-1}{12}, c_1 = \frac{L^2}{16}$$ 。

即 $y(x) = \frac{P}{EI}\left(\frac{-x^3}{12} + \frac{xL^2}{16}\right) + \frac{(x-l/2)^3}{6} u\left(x - \frac{l}{2}\right)$

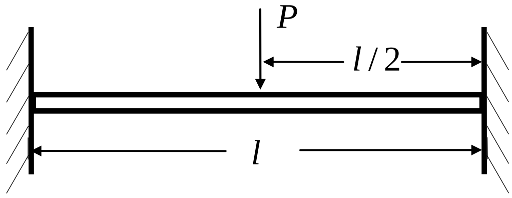
(4)轉角 $\theta(0) = \frac{dy}{dx} = \frac{PL^2}{16}$ 。

❋ 解此類型問題，應利用樑本身幾何之對稱性，有助於減少數學化簡的時間及降低計算時的難度。

☆【精選範例 2】

樑之受力圖如右，

(a) 求解答 $y(x) = ?$



【84 成大土木】

【解答】：

(1)原點取在樑之左端點。由第一小題的經驗，應利用樑本深之對稱性。

(2)方程式： $EIy''' = -V(x) = \frac{-P}{2}$ ， $(0 < x < l/2)$

邊界條件： $y(0) = y'(0) = 0, y'(l/2) = 0$ 。

(3)將方程式積分三次：

$$y(x) = \frac{P}{EI}\left(\frac{-x^3}{12} + c_2 x^2 + c_1 x + c_0\right)$$

(4)代入邊界條件： $y(0) = y'(0) = 0, y'(l/2) = 0$ ，得

$$c_0 = c_1 = 0, c_2 = \frac{L}{16}$$ ，

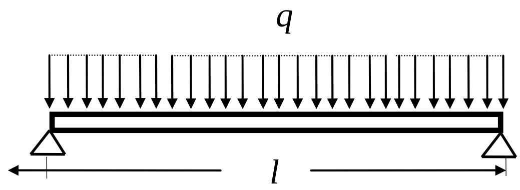
即 $y(x)=\frac{P}{EI}\left(\frac{-x^3}{12}+\frac{x^2L}{16}\right)$，$(0<x<l/2)$。

☆【精選範例 3】

樑之受力圖如右，

$EIy^{(4)}=q$，

B.C. $y(0)=y''(0)=0$
$y(l)=y''(l)=0$



請用 Fourier sine half range expansion 求解樑之撓度 $y(x)=?$ 【85 成大土木】

【解答】：

(1) 原點取在樑之左端點。

(2) 方程式：$EIy^{(4)}=q$

邊界條件：$y(0)=y''(0)=0, y(l)=y''(l)=0$。

(3) 令撓度函數：$y(x)=\sum_{1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$，代入方程式求解：

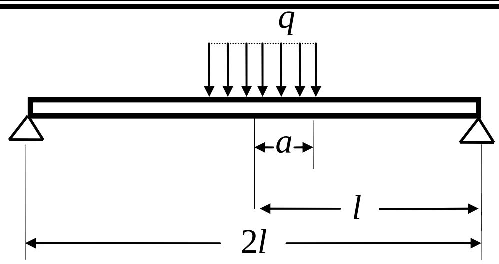
$$\sum_{1}^{\infty}a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4\sin\frac{n\pi x}{l}=q(x)=\sum_{1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi x}{l}，$$

其中 $\alpha_n=\frac{2}{l}\int_0^l q\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2q}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$。

解得：$a_n=\frac{\alpha_n}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4}=\frac{\frac{2q}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4}$。

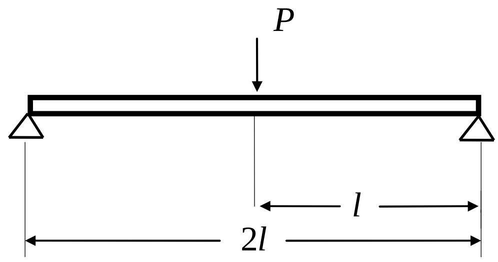
☆【精選範例 4】

樑之受力圖如右，



(a) 請用 Fourier series 求解樑之撓度 $y(x)=?$

(b) 若利用(a)小題之解求承受圖（二）之集中荷重 P 作用下的撓度曲現時，應如何做極限逼近求取？



【87 中央土木】

【解答】：

(1) 原點取在中心點，利用樑本身之對稱性，只需考慮 $0\le x\le l$。

(2) 方程式： $EIy^{(4)}=q(x)=q\big(1-u\,(x-a)\big)$

邊界條件： $y'(0)=y'''(0)=0,\ y(l)=y''(l)=0$。

(3) 令撓度函數： $y(x)=\sum_{1}^{\infty}a_n\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$，代入方程式求解：

$$\sum_{1}^{\infty}a_n\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^4\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}=q(x)=\sum_{1}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}，$$

其中 $\alpha_n=\frac{2}{l}\int_0^a q\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}dx=\frac{4q}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi a}{2l}$。

解得： $$a_n=\frac{\alpha_n}{\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^4}=\frac{\frac{4q}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi a}{2l}}{\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^4}。$$

(4) 令： $qa=P$，代回解答，取 $a\to 0$，得：

$$y(x)=\lim_{a\to 0}\left[\sum_{1}^{\infty}\frac{\frac{4qa}{(2n-1)\pi}\times\frac{\sin\left(a\times\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)}{a}}{\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right]$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\frac{\dfrac{4P}{(2n-1)\pi}\times\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}}{\left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

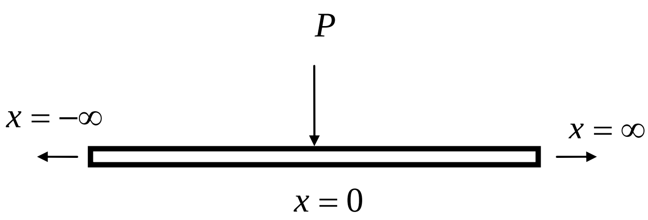
$$=\sum_{1}^{\infty}\frac{32Pl^3}{(2n-1)^4\pi^4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

☆【精選範例 5】

彈性基礎上，荷重樑之沈陷量，

如圖右，由下列微分方程決定：

$$EIy'''+ky=0$$



其一般解可表成：

$$y(x)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)e^{\lambda x}$$
$$+(c_3\cos\lambda x+c_4\sin\lambda x)e^{-\lambda x}$$

其中， $k\in R,\lambda=\sqrt[4]{\dfrac{k}{4EI}}$ 。

設有一無限長之樑至於地表，於 $x=0$ 處受點荷重 P ，證明於 $x=0$ 處之沈陷量為 $y(0)=\dfrac{p\lambda}{2k}$ 。 【84 台技營建】

【解答】：

(1)方程式： $EIy^{(4)}+ky=0$ ， $0<x<\infty$ 、

邊界條件： $y'(0)=0, EIy'''(0^+)=\dfrac{-P}{2}, y(\infty)=$ *finite* 。

(2) $y(x)=(c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x)e^{\lambda x}+(c_3\cos\lambda x+c_4\sin\lambda x)e^{-\lambda x}$

代入邊界條件： $y(\infty)=$ *finite* ，得 $c_1=c_2=0$ ，

(3) $y(x)=(c_3\cos\lambda x+c_4\sin\lambda x)e^{-\lambda x}$

代入邊界條件： $y'(0)=0, EIy'''(0^+)=\dfrac{-P}{2}$ ，得 $c_4=0, c_3=\dfrac{P}{8\lambda^3EI}$ 。

即 $y(x)=\dfrac{P\lambda}{8\lambda^4EI}\cos\lambda xe^{-\lambda x}=\dfrac{P\lambda}{2k}\cos\lambda xe^{-\lambda x}$

(4)於 $x=0$ 處之沈陷量爲： $y(0)=\dfrac{p\lambda}{2k}$ 。

☆【精選範例 6】

均匀地層中，軸向荷重樁樁身沈陷行爲，

由下列微分方程決定：

$$\frac{d^2y}{dz^2}-\lambda^2 y=0$$

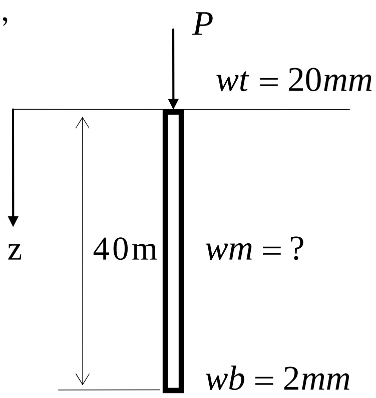
其中 y=沈陷量，z=深度，

λ=樁之特徵值。

已知某試樁樁長 40m，$\lambda=0.01\text{m}$；

樁頂沈陷量 $wt=20\,\text{mm}$，樁底沈陷

量 $wb=2\,\text{mm}$ 求樁中點之沈陷量 $wm(mm)$。



【84 台技營建】

【解答】：

(1)方程式： $\dfrac{d^2y}{dz^2}-\lambda^2 y=0$ ，

邊界條件： $y(0)=20, y(40)=2$ 。

(2) $y(x)=c_1\cosh(0.01x)+c_2\sinh(0.01x)$

代入邊界條件： $y(0)=20$ ，得 $c_1=20$ ，

代入邊界條件： $y(40)=2$ ，得 $c_2=\dfrac{2-20\cosh(0.4)}{\sinh(0.4)}=-47.7$ 。

即 $y(x)=20\cosh(0.01x)-47.7\sinh(0.01x)$

(3) 代入 $x=20$ ，得

$y(20)=20\cosh(0.2)-47.7\sinh(0.2)=10.78$ mm。