# 台中七基變分學講義

郭傑

## 幾何學之變分學問題

在物理學或幾何學中，極值問題分成兩類，例如：

(1) 求一垂直拋射物體之最高點，

$$S = S_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = S(t) \text{ 。}$$

(2) 求通過二定點$(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$之曲線 $y(x)$，使得此曲線繞 x 軸懸轉之表面積為最小，

$$I = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y ds = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = I(y, y') \text{ 。}$$

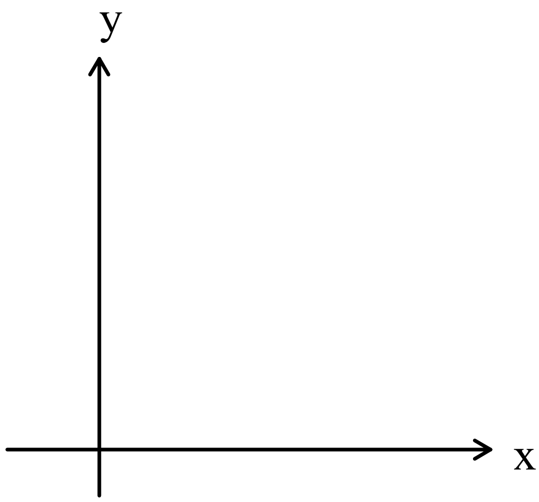
第一類問題中，函數的極值與自變數有關，而第二類問題之極值則與一未決定之函數 $y(x)$有關。為了研究此類型的問題，我們需要定義積分核中的函數，稱之為作用(action)函數$L(\dot{y}, y, x)$，根據此作用函數，可造出一個汎函(functional)：

$$I = \int_{x_1}^{x_2} L(\dot{y}, y, x) dx \text{ ，}$$

求此汎函的極值。汎函是另一支數學的分支，但我們可以簡單的說**汎函就是將一個函數 $y(x)$，映至一個純量 $I$ 的映射。**

欲解決此類型的問題，首先假設 $y(x)$為合於要求的函數，另取一個函數$\eta(x)$，$\eta(x)$滿足$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$。($\eta(x)$ **為任意函數，並不唯一，但可以假設成一個已知之函數)**

假設有一個偏離最佳解 $y(x)$的路徑 $Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ (此偏離路徑只是 $x$ 的函數，$\varepsilon$ 為一微小之實變數)，$\eta(x)\begin{cases} = 0, & x = x_1 \vee x = x_2, \\ \neq 0, & x \neq x_1, x \neq x_2. \end{cases}$。此偏離路徑之汎函為：$I = \int_{x_1}^{x_2} L(\dot{Y}, Y, x) dx$。則 $I$ 只與$\varepsilon$ 有關，且在$\varepsilon = 0$時，$I$ 為最小值，故$\frac{dI}{d\varepsilon} = 0$。




於是 我們會有以下ㄉ數學推導：

$$
\begin{aligned}
\frac{dI}{d\varepsilon} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\varepsilon} L(\dot{Y}, Y, x)\,dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \frac{d\dot{Y}}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial Y} \frac{dY}{d\varepsilon} \right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \dot{\eta}(x) + \frac{\partial L}{\partial Y} \eta(x) \right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[ -\frac{d}{dx}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \right) + \frac{\partial L}{\partial Y} \right] \eta(x)\,dx + \eta(x) \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \Bigg|_{x_1}^{x_2} \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[ -\frac{d}{dx}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \right) + \frac{\partial L}{\partial Y} \right] \eta(x)\,dx
\end{aligned}
$$

$\eta(x)$ 爲任意函數，欲使得 $\frac{dI}{d\varepsilon} = 0$ ，故

$$\frac{d}{dx}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \text{ ，}$$

此方程式稱之爲拉格朗治方程式(Lagrange equation)。

由拉格朗治方程式所產生ㄉ微分方程式，根據筆者的經驗，一般並不容以解出，基於解答方程式ㄉ技巧，我們常常需要以下這個定理：

【定理】 若 $L$ 不是 $x$ 的顯函數，即 $L = L(\dot{y}, y)$ ，則拉格朗治方程式可被化簡爲：

$$\underline{\dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = c}$$

其中 c:常數。

【證明提示】

先將 $\frac{d}{dx}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ 乘以 $\dot{y}$ ，再將此式積分，即可得到 $\dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = c$ 。

同學們可自行練習之。

## 運動學與力學之變分學問題

早期力學與運動的問題均採用牛頓運動定律，但在許多問題中，特別是多質點的運動，牛頓運動定律將變的相當複雜。在十八世紀到十九世紀初，許多科學家逐漸領悟到了：
不論是多體或單一質點的運動，均滿足某種最佳化原則，以變分學與物理學的角度稱之爲最省工原理 (principal of least action)。

根據此原理，如果以 $T$ 表運動系統之動能，$V$ 表運動系統之位能，定義 L=T-V 稱之爲作用(action)。在**保守場運動**的物體之 $L$ 滿足 Larange's 方程式，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, i=1,2,3,\cdots,n$$ ，

其中 $q_i$ 稱爲廣義座標 (generalized coordinate)，$n$ 爲系統自由度之數目。
廣義座標不一定非取 $x,y,z$ 或長度爲描述系統之自變數，可取角度或任何對問題有幫助的變數，故其不僅僅是物理直觀上的座標而已，故稱之爲廣義座標。

但是如果物體在非保守場之下做運動，則控制物體運動ㄉ Lagrange's 方程式，就必須改變爲以下ㄉ形式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i, i=1,2,3,\cdots,n$$

其中方程式中的 $Q_i$ ：爲沿著廣義座標 $q_i$ 方向的非保守力。

☆【精選範例 1】

For a simple pendulum of length $L$ and mass $m$, neglecting any frictional effects. Initial angular displacement is $\theta_0$.

(a) Derive its equation of mation.

(b) Simplified the equation obtained in (a) to obtain the linearlized equation $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta=0$, where $\theta$ is the angular displacement, g is the gravational acceleration.

(c) Obtain the perodic time integral formula of the pendulum.Is it dependent on $\theta_0$ ?

【83 成大工科、80 台大電機】

【解答】：(a) $L=T-V=\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2+mgL\cos\theta$ ，代入

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$ ，

可得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\sin\theta=0$$ 。

(b) 當擺角很小，即 $\theta\to 0$ ， $\sin\theta\to\theta$ ，則：$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\theta=0$ 。此方程式爲線性。

可求出單擺之解答並計算單擺之週期爲 $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 。

(c) $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}\sin\theta=0$，方程式爲非線性。

但方程式中無自變數 $\theta$ ，令 $\frac{d\theta}{dt}=\omega$ ，

方程式變成：

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta}=-\frac{g}{L}\sin\theta \Rightarrow \frac{\omega^2}{2}=\frac{g}{L}(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{L}}\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}$$

$$dt=\sqrt{\frac{L}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$$

單擺之週期爲 $T=4\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}d\theta$ 。

☆【精選範例 2】

請寫下複擺問題之運動方程式。

【解答】：取廣義座標 $\theta_1,\theta_2$，則

系統的位能爲：$V=-m_1gl\cos\theta_1-m_2gl(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$ ，

系統的動能爲：$T=\frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^{\,2}+\frac{1}{2}m_2l^2[\dot{\theta}_1^{\,2}+\dot{\theta}_2^{\,2}-2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)]$ ，

L=T-V，代入 Lagrange equation：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_1}=0 \text{ ，}$$

可得：

$$\frac{d}{dt}[(m_1+m_2)\dot{\theta}_1-m_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)]+m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{g}{l}[m_1\sin\theta_1+m_2\sin\theta_1]=0 \text{ 。}$$

同理，另一個方程式爲：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_2}=0 \text{ ，}$$

$$\frac{d}{dt}[m_2\dot{\theta}_2-m_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)]-m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{g}{l}m_2\sin\theta_2=0 \text{ 。}$$

☆【精選範例 3】

在(x,y)平面，連接(-a,b)與(a,b)兩點ㄉ一條曲線，使得此曲線繞 x 軸旋轉後所產生ㄉ表面積爲最小，請寫下此曲面之方程式，並解之。

【解答提示】：根據前文ㄉ討論

$$I=\int_{-a}^{a}2\pi y ds=2\pi\int_{-a}^{a}y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx=I(y,y') \text{ 。}$$

利用定理，$\dot{y}\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}-L=c$ ，$L=y\sqrt{1+(y')^2}$ 代入可得

$$y'\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}-y\sqrt{1+(y')^2}=c$$

整理可得：$y=c\sqrt{1+(y')^2}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{\dfrac{y^2}{c^2}-1}$（考慮負ㄉ 結果相同）

令 $X=\dfrac{x}{c},Y=\dfrac{y}{c}\Rightarrow\dfrac{dY}{dX}=\sqrt{Y^2-1}$，

解得 $\ln(Y+\sqrt{Y^2-1})=X+k$ 或 $Y=\cosh(X+k)$。

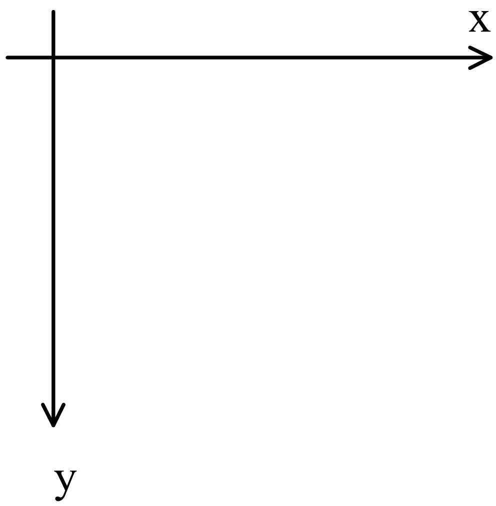
代入 y(-a)=y(a)得 $k=0$，故有

$$y=c\cosh(\frac{x}{c})\text{，其中 } c \text{ 為 } b=c\cosh(\frac{a}{c})\text{ 的根。}$$

☆【精選範例 4】

在(x,y)平面，連接(0,0)與(a,b)兩點ㄉ一條曲線，使得一物體沿此曲線自一點滑自另一點所需ㄉ時間為最小（假設無摩擦力）。

【解答提示】： 設原點物體為靜止，由能量守恆




$$\frac{1}{2}mv^2+mgy=0$$

$$v=\sqrt{2gy}$$

此問題所需被極小化ㄉ積分函數為：

$$I=\int_0^a\frac{1}{v}ds=\int_0^a\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx=I(y,y')\text{。}$$

利用定理，$\dot{y}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{y}}-L=c$，$L=\dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ 代入可

得

$$y'\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}-\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}=c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}=c$$

整理得 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{\dfrac{1}{2cgy}-1}=\sqrt{\dfrac{1-2cgy}{2cgy}}$

解出此方程式ㄉ解（不好解），代入邊界條件，$\begin{cases}y(0)=0\\y(a)=b\end{cases}$ 但其解為一條擺線(cycloid)。

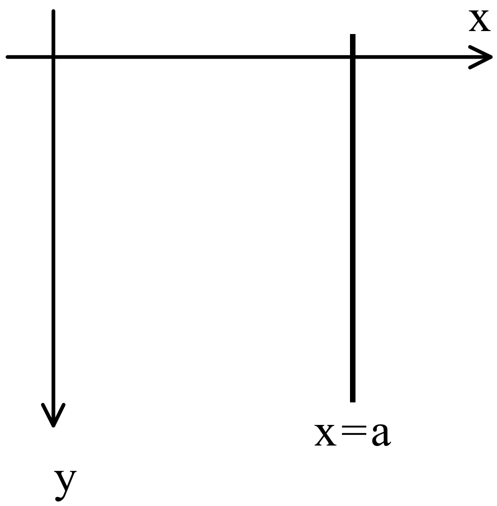
擺線參數式為：$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$。

此類問題稱為，最速落徑的問題(brachistochrone)。

底下另一個最速落徑的問題，亦請參考。

☆【精選範例 5】

在(x,y)平面，連接(0,0)至 x=a 上任一點ㄉ一條曲線，使得一物體沿此曲線自一點滑自另一線所需ㄉ時間爲最小（假設無摩擦力）。




【解答提示】：設原點物體爲靜止，由能量守恆

$$\frac{1}{2}mv^2+mgy=0$$

$$v=\sqrt{2gy}$$

此問題所需被極小化ㄉ積分函數爲：

$$I=\int_0^a \frac{1}{v}ds=\int_0^a \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx=I(y,y')$$ 。

由原始理論ㄉ推導，先考慮

$\eta(x)\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}\right|_0^a$ =0，邊界點 $\eta(a)\neq 0$ ，所以邊界條件：

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{Y}}\right|_{x=a}=\left.\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}\right|_{x=a}=0\Rightarrow y'(a)=0$$

再利用定理， $\dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}-L=c$ ， $L=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ 代入可得

$$y'\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}-\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}=c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}=c$$

整理可得 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1}{2cgy}-1}=\sqrt{\frac{1-2cgy}{2cgy}}$

解出此方程式ㄉ解（不好解），代入邊界條件， $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(a)=0 \end{cases}$ ，但其解爲另一條擺線。

類題 1:證明球上連接兩點最短距離的曲線，爲連接球上兩點之大圓曲線。